COLEGIO DE BACHILLERES

Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial
(Apoya a Plan 92)

MATEMÁTICAS III

Guía para presentar exámenes de
Recuperación o Acreditación Especial

Matemáticas III
(Versión preliminar)

Esta guía fue elaborada por la **Secretaría Académica,** a través de la **Dirección de Planeación Académica**.

Colaboradores

Profr. Mario Luis Flores
Profra. Guadalupe Mercedes Rodríguez Segundo

Colegio de Bachilleres, México
www. cbachilleres.edu.mx
Rancho Vista Hermosa No. 105
Ex-Hacienda Coapa,
04920, México, D.F.

La presente obra fue editada en el procesador de palabras Word 2002 (Office xp).

Office xp es marca registrada de Microsoft Corp.

Este material se utiliza en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Colegio de Bachilleres, institución pública de educación media superior del Sistema Educativo Nacional.

AGOSTO 2004

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

La evaluación de recuperación y la de acreditación especial son oportunidades extraordinarias que debes aprovechar para aprobar las asignaturas que, por diversas razones, reprobaste en el curso normal; pero ¡cuidado!, presentarse a un examen sin la preparación suficiente significa un fracaso seguro, es una pérdida de tiempo y un acto irresponsable que puedes evitar.

¿Cómo aumentar tu probabilidad de éxito en el examen mediante la utilización de esta guía? La respuesta es simple, observa las siguientes reglas:

- Convéncete de que tienes la capacidad necesaria para acreditar la asignatura. Recuerda que fuiste capaz de ingresar al Colegio de Bachilleres mediante un examen de selección.

- Sigue al *pie de la letra* las instrucciones de la guía.

- Procura dedicarte al estudio de este material, *durante 15 días al menos, tres horas diarias continuas.*

- Contesta toda la guía: es un requisito que la presentes resuelta y en limpio al profesor aplicador antes del examen correspondiente.

PRÓLOGO

En el marco del Programa de Desarrollo Institucional 2001-2006 el **alumno** tiene especial relevancia, por lo que el Colegio de Bachilleres Metropolitano se ha abocado a la elaboración de diversos materiales didácticos que apoyen al estudiante en los diversos momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Entre los materiales elaborados se encuentran las guías de estudio, las cuales tienen como propósito apoyar a los estudiantes que deben presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial, con objeto de favorecer el éxito en los mismos.

En este contexto, la Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial de **Matemáticas III** se ha elaborado pensando en los estudiantes que por diversas causas reprobaron la asignatura en el curso normal y deben acreditarla a través de exámenes en periodos extraordinarios.

Esta guía se caracteriza por abordar, de manera sintética, los principales temas señalados en el programa de estudios, favorecer la ejercitación de los métodos, conceptos y modelos matemáticos propios de la geometría euclideana y no euclideana, y de la trigonometría, así como proporcionar elementos de autoevaluación y sugerencias en caso de que se necesite mayor información para comprender dichos temas.

En la primera unidad de la guía, denominada **CONSTRUCCIÓN, EXPERIMENTACIÓN Y OBSERVACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LA FIGURA GEOMÉTRICA: UNA VISIÓN ESTÁTICA**, se abordan las propiedades de congruencia de segmentos y de ángulos, la semejanza de figuras geométricas, la aplicación del teorema de Pitágoras y la relación entre ángulos y líneas. Además, se incluyen ejercicios en donde se utilizan los principios y las operaciones algebraicas y geométricas de estas figuras en la solución de problemas.

En la segunda unidad, **CONSTRUCCIÓN, EXPERIMENTACIÓN Y OBSERVACIÓN DE LA FIGURA GEOMÉTRICA: UNA VISIÓN DINÁMICA,** se abordan las funciones trigonométricas (leyes de: seno, coseno, tangente) y sus inversas, operaciones con vectores en el plano, así como las transformaciones geométricas (traslación, rotación, reflexión). También se incluyen problemas donde se ejercitan los procedimientos algebraicos de estos conceptos.

La tercera unidad, **ORGANIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO: EL MÉTODO AXIOMÁTICO**, aborda los procesos de razonamiento deductivo e inductivo en la construcción del conocimiento geométrico, en particular respecto al rigor en la estructura de las demostraciones y en el aspecto formal de sus aplicaciones concretas en la solución de problemas geométricos, pero principalmente en el desarrollo de habilidades de análisis en el estudiante.

En la cuarta unidad, **ELEMENTOS DE OTRAS GEOMETRÍAS**, se abordan las semejanzas y diferencias de figuras desde la geometría euclideana y no euclideana, se revisan algunas de las consecuencias del quinto postulado de Euclides y se desarrollan actividades introductorias al proceso de iteración y recursividad en figuras geométricas.

Por último, se proporciona una bibliografía básica para consultar en fuentes originales los temas desarrollados en la guía.

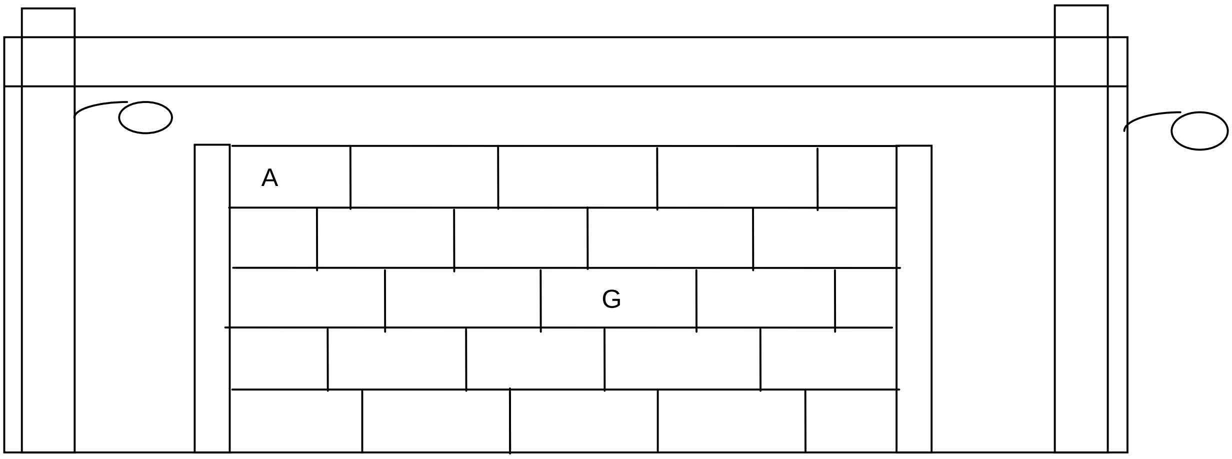
Unidad 1

CONSTRUCCIÓN, EXPERIMENTACIÓN Y OBSERVACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LA FIGURA GEOMÉTRICA: UNA VISIÓN ESTÁTICA

1.1 Estudio de líneas y ángulos

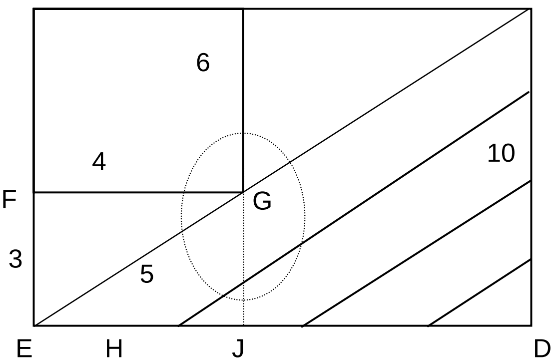
Aprendizajes
• Aplicar las propiedades de congruencia de segmentos. • Aplicar las propiedades de congruencia de ángulos. • Analizar la semejanza de las figuras de acuerdo con sus ángulos y segmentos. • Analizar la relación entre ángulos y líneas.

¿Haz observado los cables de alta tensión, la relación que tienen entre sí, así como con los postes que los sostienen? Los cables guardan la misma distancia entre sí, es decir, no se juntan; por lo tanto, se dice que son paralelos; entre poste y poste se encuentra una porción del cable que se puede interpretar como un **segmento de recta.**



Observa la barda, está sostenida por dos columnas y tabiques; las columnas tienen la misma magnitud, es decir, son iguales, por lo que se dice que son **congruentes**. Los tabiques completos también son congruentes (tienen el mismo tamaño y la misma forma), pero en el caso de los tabiques denotados con las letras A y G sólo tienen la misma forma pero distinto tamaño.

Observa este mosaico; en él se forman distintas figuras; por ejemplo:



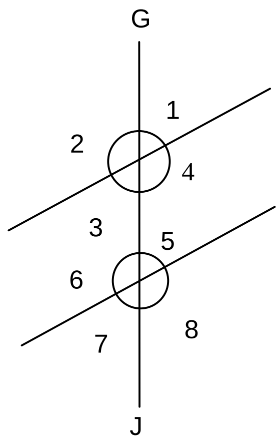
PUNTOS	NOMBRE FIGURA
A, B, F, G	Cuadrilátero
A, C, D, E	Cuadrilátero
B, C, G	Triángulo
C, D, E	Triángulo
F, G, E	Triángulo

Si analizas dos triángulos de diferentes ternas; por ejemplo Δ BCG, Δ FGE, al efectuar el cociente entre sus perímetros, obtienes que sí:

El perímetro del triángulo BCG es 24 y el perímetro del triángulo FGE es 12, entonces la relación es r = 2.

Así, al obtener la relación entre los lados respectivos tenemos: $\frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{8}{4} = \frac{\overline{BG}}{\overline{FE}} = \frac{6}{3} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GE}} = \frac{10}{5}$

La relación r es una constante cuyo valor es 2, por lo que se les llama **triángulos semejantes.** Al realizar un zoom (acercamiento) alrededor del punto G, J, tienes dos rectas paralelas cortadas por una secante, en el que se forman 8 ángulos.



Recuerda que dos **ángulos adyacentes suman 180° y se llaman *suplementarios*,** éstos son:

$$\angle 1 + \angle 2 = 180° \qquad \angle 1 + \angle 4 = 180°$$
$$\angle 3 + \angle 4 = 180° \qquad \angle 2 + \angle 3 = 180°$$
$$\angle 5 + \angle 6 = 180° \qquad \angle 5 + \angle 8 = 180°$$
$$\angle 5 + \angle 8 = 180° \qquad \angle 6 + \angle 7 = 180°$$

También al comparar los ángulos:

$$\angle 1 \; y \angle 3 \qquad \angle 5 \; y \angle 7$$
$$\angle 2 \; y \angle 4 \qquad \angle 6 \; y \angle 8$$

Éstos tienen el mismo vértice, pero se encuentran en lados diferentes de la transversal, por lo que se llaman **opuestos por el vértice**.

Los ángulos que tienen la misma abertura y que están en el mismo lado de la secante se denominan **correspondientes**; éstos son:

$$\angle 2 \; y \; \angle 6 \qquad \angle 1 \; y \; \angle 5$$
$$\angle 3 \; y \; \angle 7 \qquad \angle 4 \; y \; \angle 8$$

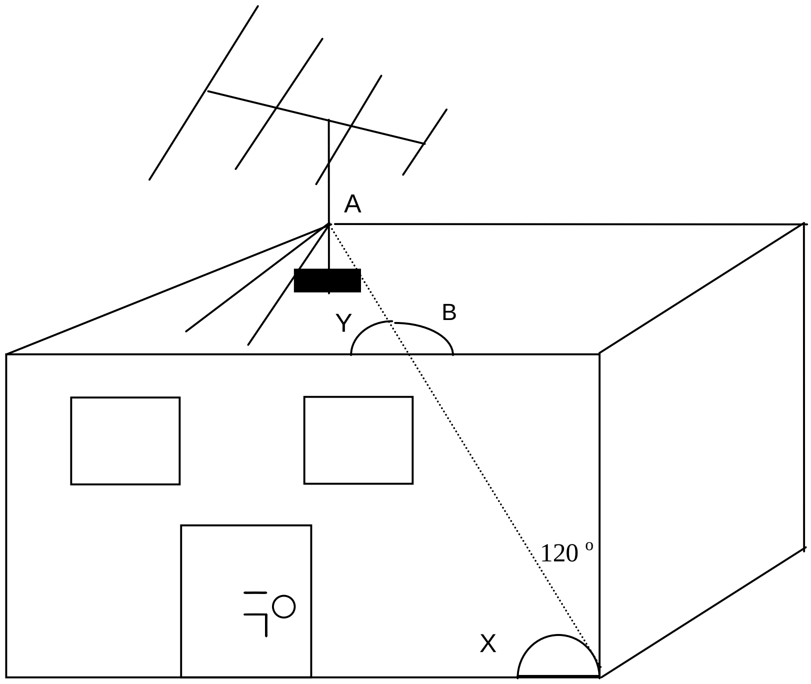
y sus valores son iguales.

Cuando los ángulos están en distintos lados de la secante reciben el nombre de alternos y pueden ser **alternos internos** si están entre las paralelas como $\angle 3$ y $\angle 5$; $\angle 4$ y $\angle 6$; o **alternos externos** si se encuentran fuera de las paralelas como $\angle 1$ y $\angle 7$; $\angle 2$ y $\angle 8$; cuyos valores son iguales.

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Veamos en un ejemplo las ideas anteriores.

Una persona desea colocar una antena en la azotea de su casa para que su televisor tenga una buena recepción; ésta debe tener una base paralela al piso y la antena debe estar un poco inclinada como se muestra en la figura.



Los cables con los cuales se sujeta la antena tienen el mismo tamaño y se encuentran a la misma distancia de la base; por lo tanto, son congruentes.

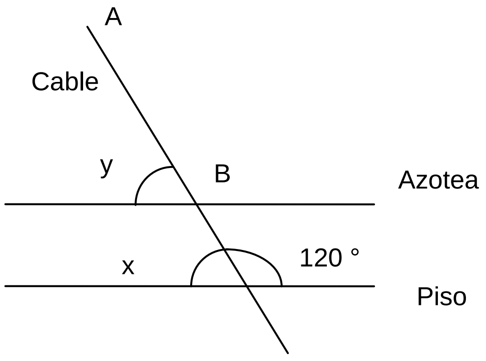
Considera ahora la línea horizontal que representa a la azotea y al piso y la prolongación del cable A B; podemos obtener el ángulo de inclinación que debe tener este cable con respecto a la azotea y al piso ya que el ángulo de 120 ° y el ángulo x son suplementarios, por lo que suman 180°; entonces:

$120° + x = 180°$

Despejando x

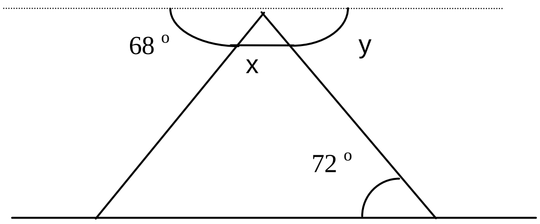
$x = 180° - 120°$

$x = 60°$



El ángulo “x” y el ángulo “y” que representan la inclinación del cable son ángulos correspondientes, por lo que sus valores son iguales.

Observa cuidadosamente la figura y determina el valor de los ángulos “x”, “y”.



EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención la siguiente información y coloca sobre la(s) línea(s) la(s) palabras(s) que complete(n) correctamente los enunciados.

1. Dos segmentos son congruentes si tienen la misma _________________.

2. Dos figuras geométricas son congruentes si tienen la misma______________y el mismo ____________

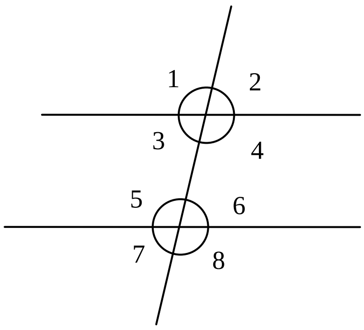
3. Si un segmento AB es congruente con un segmento CD y el segmento CD es congruente con otro segmento EF, entonces el segmento _________ es congruente con el segmento EF.

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada reactivo y coloca en el paréntesis de la izquierda la letra de la opción que lo conteste correctamente.

4. (   ) En una figura congruente con otra, la medida de los ángulos es:

a) congruente.
b) diferente.
c) incongruente.
d) semejante.

5. (   ) Observa la siguiente figura.



En el par de rectas cortadas por una transversal los ángulos alternos externos son:

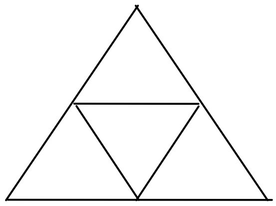
a) $\angle 1$; $\angle 2$
$\angle 7$; $\angle 8$

b) $\angle 1$; $\angle 4$
$\angle 6$; $\angle 7$

c) $\angle 1$; $\angle 7$
$\angle 2$; $\angle 8$

d) $\angle 1$; $\angle 8$
$\angle 2$; $\angle 7$

6. (   ) Observa la siguiente figura.



El número de triángulos congruentes es:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

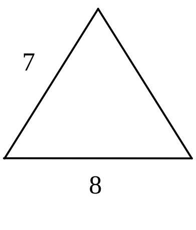
INSTRUCCIONES: Coloca sobre la(s) línea(s) el (los) valor(es) que complete(n) correctamente los enunciados.

7. Si un segmento mide 24 cm y otro segmento semejante mide la quinta parte, entonces su medida debe ser _______________ cm.

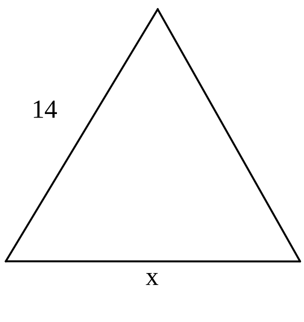
8. Si un segmento mide 3 cm y otro es el triple de su valor, su medida es _____________ cm.

8. Para que exista una relación de semejanza entre los siguientes triángulos *a)* y *b)* el valor de “x” debe ser_________________.

a)

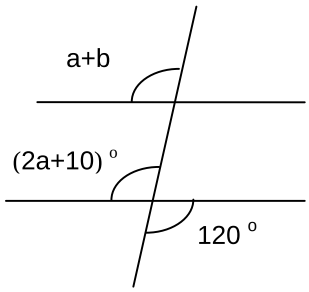


b)



INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y coloca en el paréntesis de la izquierda la letra de la opción que los conteste correctamente.

10. (   ) Analiza la siguiente figura.



El valor que corresponde a cada una de las letras es:

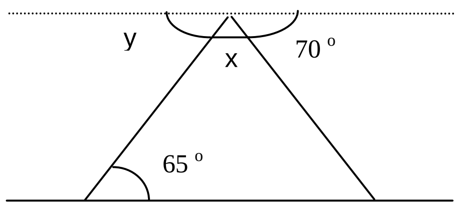
a) a=55 º
   b=60 º

b) a=55 º
   b=65 º

c) a=60 º
   b=55 º

d) a=65 º
   b=55 º

11. (   ) Analiza la figura.



Determina los valores correctos de “x” y “y”.

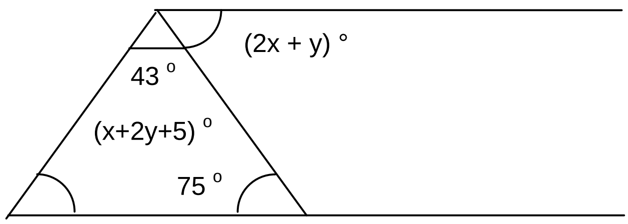
a) x=70 º
   y=40 º

b) x=65 º
   y=45 º

c) x=45 º
   y=65 º

d) x=40 º
   y=70 º

12. (   )   Analiza la siguiente figura.



Obtén el valor de “x” y de “y”.

a) x=75 º
   y=15 º

b) x=31 º
   y=13 º

c) x=15 º
   y=75 º

d) x=13 º
   y=31 º

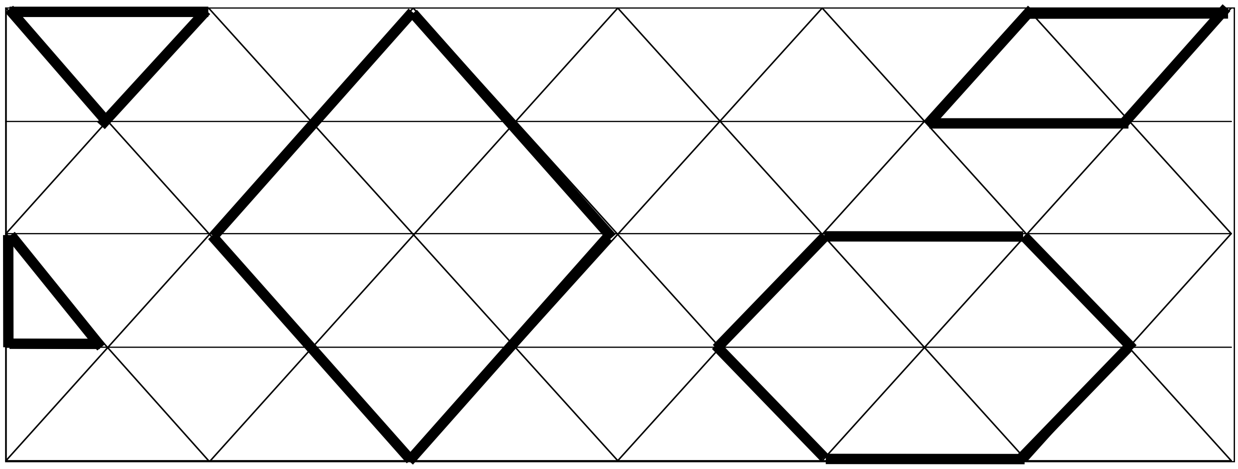
TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta	Sugerencias
1 2 3	magnitud o medida forma, tamaño AB	Revisa las definiciones de congruencia de segmentos y congruencia de polígonos.
4 5 6	a d c	Revisa el concepto de congruencia en el libro Geometría y trigonometría, de Abelardo Guzmán Herrera, página 50.
7 8 9	4.8 9 16	Revisa el concepto de semejanza en el libro Geometría y trigonometría, de Abelardo Guzmán Herrera, página 60.
10 11 12	b c b	Aplica los conceptos de pares de ángulos en rectas paralelas cortadas por una transversal y de ángulos suplementarios.

1.2 Estudio del primer polígono: el triángulo

Aprendizajes
• Clasificar a los polígonos. • Analizar los lados y ángulos del triángulo. • Aplicar los criterios de congruencia y semejanza de triángulos. • Aplicar el Teorema de Pitágoras en la solución de problemas. • Identificar las líneas y puntos notables del triángulo (mediana, mediatriz, bisectriz y altura). • Clasificar triángulos a partir de sus lados y ángulos.

Los arquitectos y decoradores para sus diseños realizan arreglos con figuras geométricas que encajan entre sí, cubriendo toda una región (pisos, paredes, fachadas etc.), sin que se sobrepongan unas a otras y sin haber separación entre ellas. Estos arreglos se llaman mosaicos, por ejemplo:



El mosaico está hecho de triángulos, pero puedes observar que al agrupar algunos de ellos se forman diferentes polígonos, que podemos clasificar de dos formas.

Clasificación de los polígonos

Por sus ángulos
Convexo, si todas sus diagonales están en el interior del polígono. **Cóncavo**, si por lo menos una de sus diagonales no está en el interior del polígono.

Por sus lados	
No. de lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Eneágono
10	Decágono
12	Dodecágono

Algunos polígonos tienen todos sus *lados congruentes* y también sus *ángulos congruentes* entre sí, por lo que se les llama **polígonos regulares.**

El polígono con el menor número de lados es el triángulo, el cual se clasifica de acuerdo a la medida de sus lados o tomando en cuenta la clase de ángulos que contienen.

Clasificación de los triángulos según sus *lados*

Nombre	Características
Triángulo escaleno	Tres lados desiguales.
Triángulo isósceles	Dos lados iguales y uno desigual.
Triángulo equilátero	Tres lados congruentes.

Clasificación de los triángulos según sus *ángulos*

Nombre	Características
Triángulo acutángulo	Sus tres ángulos son agudos.
Triángulo rectángulo	Un ángulo es recto, el lado opuesto a dicho ángulo se llama hipotenusa y los lados perpendiculares se llaman catetos.
Triángulo obtusángulo	Un ángulo es obtuso.

En cualquier triángulo se pueden trazar diferentes líneas, a cada línea que se traza desde un vértice al punto medio del lado opuesto se le llama **mediana**; se pueden trazar tres medianas y al punto de intersección se le llama **baricentro**.

Cada segmento perpendicular, trazado en el punto medio de cada lado, se llama **mediatriz**; hay tres mediatices y al punto de intersección se le llama **circuncentro.**

A la línea que divide un ángulo en dos ángulos iguales se le llama **bisectriz**; hay tres bisectrices, Y el punto donde cortan se llama **incentro.**

También se pueden trazar segmentos perpendiculares desde un vértice al lado opuesto a ellos llamados **alturas** y al punto de intersección se le llama **ortocentro**.

Si observas nuevamente el "mosaico" puedes notar que hay triángulos con la misma forma y el mismo tamaño, por lo que se les llama congruentes. **Los casos de congruencia son:**

I. Cuando un triángulo tiene dos lados y el ángulo comprendido por ellos es igual a otro (**l. a. l. es decir, lado-ángulo-lado).**

II. Si tienen un lado con la misma medida y los ángulos adyacentes a ese lado también son iguales **(a. l. a. es decir, ángulo-lado-ángulo).**

III. Si tienen sus tres lados respectivamente congruentes **(l. l. l. es decir, lado-lado-lado).**

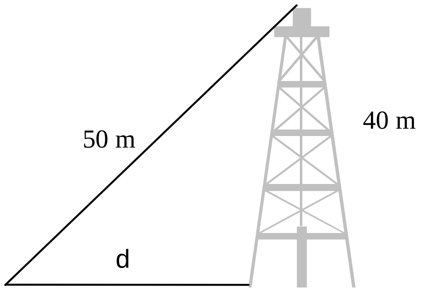
También en el "mosaico" puedes ver que hay formados triángulos con diferentes tamaños, pero de la misma forma. S*i los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triángulo,* *entonces los dos triángulos son semejantes* **(l. l. l.).** Si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de otro triángulo y los lados correspondientes que contienen al ángulo son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes **(l. a. l.).** También si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes **(a. a. a.).**

Si observas cuidadosamente el mosaico, puedes ver que los triángulos del lado izquierdo y los del lado derecho son triángulos rectángulos. En cualquier triángulo rectángulo existe una relación enunciada en el Teorema de Pitágoras: ***"En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al cuadrado construido sobre la hipotenusa".***

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Veamos un ejemplo donde se aplican las ideas anteriores:

Para sostener una torre de 40 m de altura se colocan cables de acero de 50 m de largo como lo muestra la figura.



Si se colocan los cables desde la parte más alta de la torre, ¿a qué distancia de la torre se debe sujetar cada cable?

Si analizas la figura puedes observar que se trata de un triángulo rectángulo, en donde se tiene el valor de la hipotenusa y un cateto por lo que para dar respuesta a la situación planteda tendremos que calcular el valor del otro cateto aplicando el Teorema de Pitágoras.

Observa el procedimiento de solución.

$d^2 + (40\text{ m})^2 = (50\text{ m})^2$

$d^2 + 1600\text{ m}^2 = 2500\text{ m}^2$

$d^2 = 2500\text{ m}^2 - 1600\text{ m}^2$

$d^2 = 900\text{ m}^2$

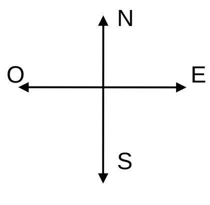
$\sqrt{d^2} = \sqrt{900\,m^2}$

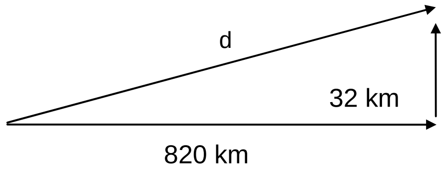
$d = 30\text{ m}$

Cada cable se debe fijar a 30 m de la torre.

EJERCICIO

Un avión vuela hacia el este con una velocidad de 820 km/h. Un viento dirigido hacia el norte lo desvía a una velocidad de 32 km/h, como se muestra en la figura. ¿Qué distancia recorrió el avión en esa hora?





EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada reactivo y coloca en el paréntesis de la izquierda la letra de la opción que lo conteste correctamente.

1. ( ) Si en un polígono todas las diagonales que se trazan están en su interior, el polígono se llama:

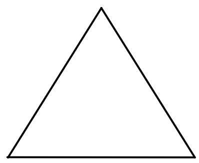
   a) cóncavo.
   b) convexo.
   c) irregular.
   d) de n-lados.

2. ( ) Los polígonos cuyos lados tienen la misma medida y todos sus ángulos son congruentes se llaman:

   a) cóncavos.
   b) convexos.
   c) irregulares.
   d) regulares.

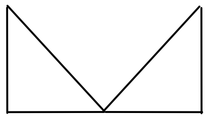
3. ( ) ¿Cuál de las siguientes figuras representa un polígono cóncavo?

   a)

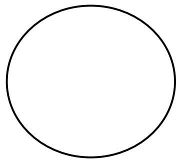


   b)

   c)



   d)



INSTRUCCIONES: Coloca sobre la(s) línea(s) la(s) palabra(s) que complete(n) correctamente los enunciados.

4. El triángulo cuyos tres lados tienen diferente medida se llama ________________________.

5. Al triángulo que tiene dos lados congruentes se le llama ______________________________.

6. Al triángulo con un ángulo recto se le llama _____________________________________.

7. El punto donde se cortan las medianas se llama __________________________________.

8. El segmento que divide en dos ángulos iguales a cualquier ángulo del triángulo recibe el nombre de __________________________.

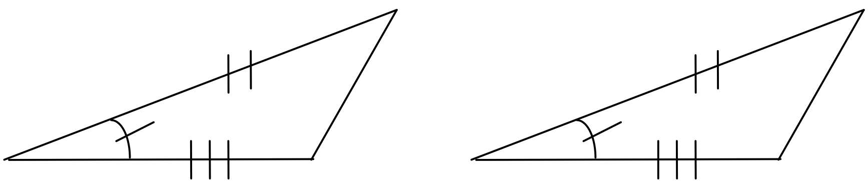
9. El incentro es el centro de una circunferencia que se puede trazar en el _______________ del triángulo.

INSTRUCCIONES: Observa que los siguientes pares de triángulos son congruentes entre sí. Analízalos y escribe el postulado **(l. a. l.; a. l. a.; l. l. l.)** que justifique la relación.

10.

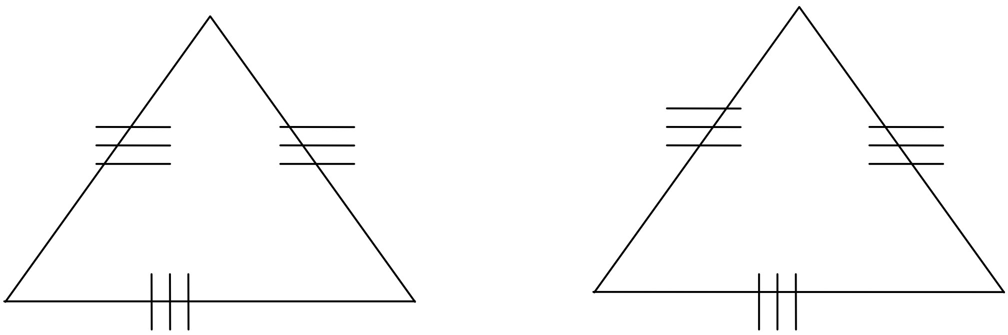
____

11.



____________-

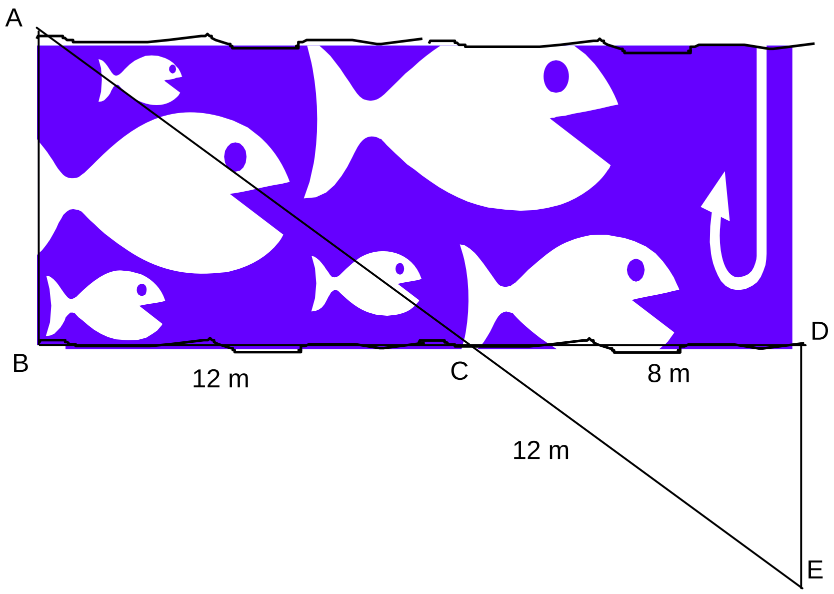
12.



____

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y coloca en el paréntesis de la izquierda la opción que los conteste correctamente.

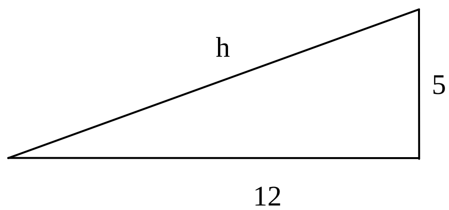
13. (   ) Observa el siguiente dibujo.



¿Cuál es el valor del ancho AB del río?

a) 9 m
b) 12 m
c) 18 m
d) 21 m

14. (   ) Observa el siguiente triángulo.



¿Cuánto vale la hipotenusa?

a) 7
b) 13
c) 17
d) 169

15. ( ) La diagonal de un cuadrado es 12, por lo tanto, cada lado vale:

a) $\sqrt{6}$
b) $\sqrt{12}$
c) $\sqrt{24}$
d) $\sqrt{72}$

16. ( ) El pie de una escalera de 10 m está a 6 m de una pared, por lo que la altura a la que llega la escalera es:

a) 3 m
b) 4 m
c) 5 m
d) 8 m

INSTRUCCIONES: Coloca sobre la línea la(s) palabra(s) que complemente(n) correctamente cada enunciado.

17. El triángulo que tiene dos lados con la misma medida y el otro lado es diferente se llama ____________________.

18. Recibe el nombre de triángulo ____________________ si tiene sus tres ángulos agudos.

19. Si en un triángulo uno de sus ángulos mide 90^0, entonces es ______________________ .

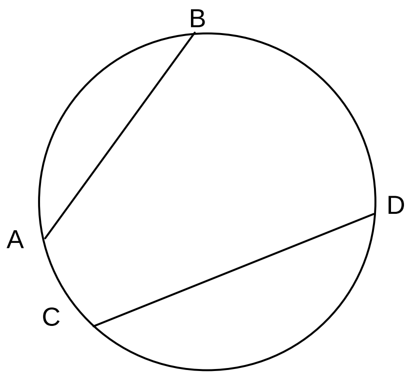
TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta	Sugerencias
1 2 3	B D C	Revisa la clasificación de polígonos.
4 5 6	Escaleno Isósceles Triángulo rectángulo	Emplea la clasificación de triángulos de acuerdo a la medida de sus lados y de sus ángulos.
7 8 9	Baricentro Bisectriz Interior	Utiliza los conceptos de rectas y puntos notables en la circunferencia.
10 11 12	a. l. a. l. a. l. l. l. l.	Estudia los casos de igualdad de triángulos en el libro Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría, de Aurelio Baldor, páginas 64, 65 y 66.
13 14 15 16	c b d d	Estudia semejanza de triángulos y Teorema de Pitágoras en el libro Geometría Elemental, de Edwin M. Hemmerling, páginas 286, 290, 291 y 296.
17 18 19	Isósceles Acutángulo Rectángulo	Emplea la clasificación de triángulos de acuerdo a la medida de sus lados y de sus ángulos.

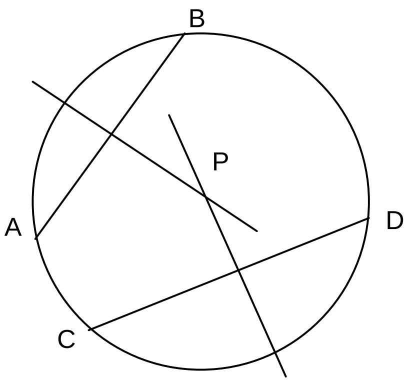
1.3 Estudio de los polígonos y el círculo

Aprendizajes
• Relacionar los elementos que constituyen al círculo. • Calcular áreas de polígonos. • Calcular área del círculo. • Calcular perímetro de polígonos.

El círculo es una de las figuras geométricas que han cambiado el curso del desarrollo humano, ya que se le ha utilizado en diversas áreas: como elemento decorativo, en forma de polea, para la construcción de llantas, ruedas, tubos, etc., y en dicho uso se le han descubierto importantes propiedades; por ejemplo, para determinar el centro de una rueda se trazan dos segmentos que unen la orilla de la rueda como lo muestra la figura:



Al trazar dos bisectrices perpendiculares a los segmentos éstas se cortan exactamente en el centro.

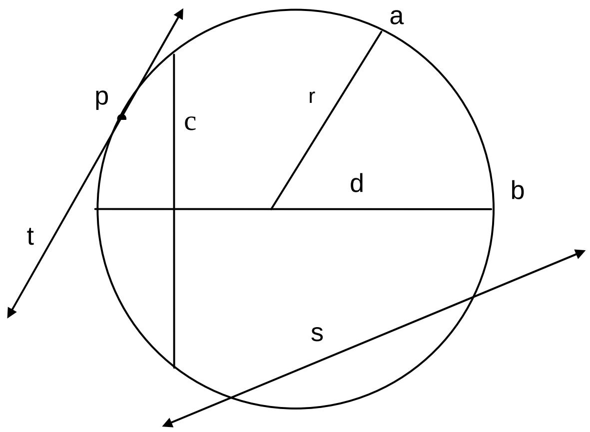


Existen otros puntos, segmentos y ángulos relacionados con el círculo que se utilizan en técnicas de navegación, diseño de tornillos, etc., por lo que es importante dar sus definiciones:

Círculo, es la superficie plana limitada por la circunferencia, la cual es una curva plana y cerrada cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro.

Los principales elementos del círculo son:

Cuerda: Segmento cuyos extremos son dos puntos del círculo; obsérvalo con la letra (c).
Diámetro: Cuerda que pasa por el centro del círculo (d).
Radio: Segmento que va del centro a cualquier punto del círculo (r).
Secante: Recta que corta al círculo en dos puntos (s).
Tangente: Recta (t) que toca al círculo en un solo punto llamado punto de tangencia (p).
Arco: Porción de una circunferencia (ab).



En la figura anterior también podemos observar que ***si una recta es tangente a un círculo entonces es perpendicular al radio que va al punto de tangencia.***

Ángulo central, es un ángulo cuyo vértice está en el centro del círculo; su medida está dada por la magnitud en grados del arco que subtiende.

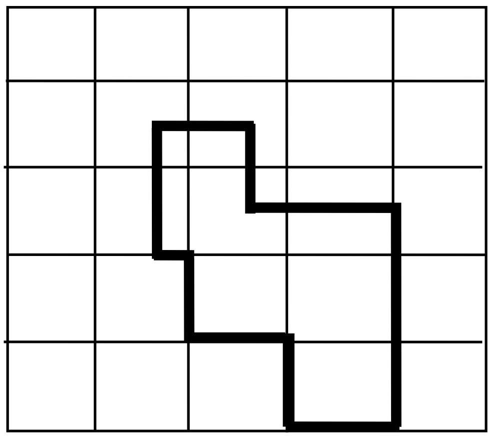
Ángulo inscrito, es aquél cuyo vértice coincide con cualquier punto de la circunferencia y sus lados pasan por dos puntos de la circunferencia; tiene por medida la mitad de la magnitud del ángulo central que subtiende el arco.

Ángulo exterior, es aquél cuyo vértice se encuentra en la parte exterior y sus lados pueden ser secantes o tangentes y tienen por medida la diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

Ángulo semiinscrito, está determinado por una cuerda de una circunferencia y la tangente está en uno de los extremos de la cuerda; tiene por medida la mitad del arco subtendido por la cuerda.

Además de estos elementos del círculo que hemos revisado, vale la pena recordar que se puede calcular su **perímetro** empleando la fórmula: $\mathbf{P = 2\pi\, r}$; también podemos calcular el **área** del círculo utilizando la fórmula: $\mathbf{A = \pi\, r^2}$

En general, **para calcular el perímetro de una figura se considera la longitud de su contorno,** está dado en unidades bidimensionales (m, cm, km, yardas, pulg, etc.); mientras que **el área es el número de unidades cuadradas que caben en ella**, son bidimensionales (m^2, cm^2, km^2, yardas^2, pulg^2, etc.). El cálculo de éstos se puede realizar utilizando un geoplano, por ejemplo; para calcular el perímetro y el área de la figura dentro del geoplano se puede observar que:

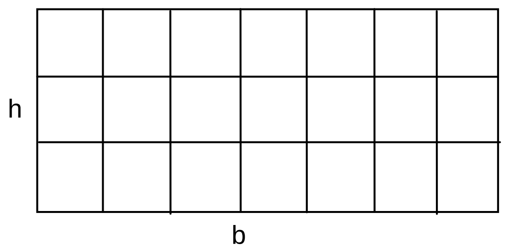


perímetro = 12 u

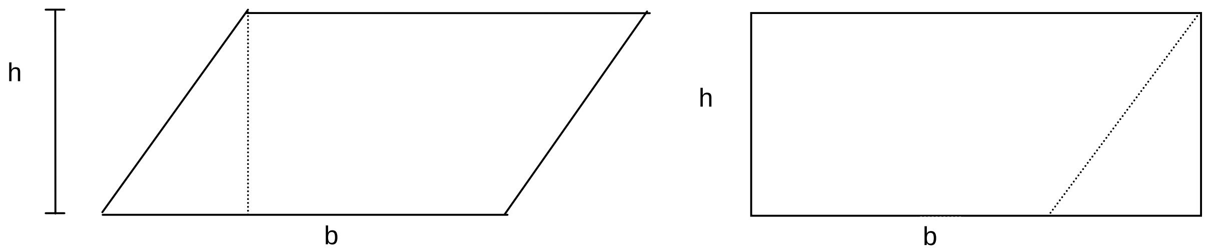
área = 5 ¼ u^2

Sin embargo, existen fórmulas que son expresiones de una ley o principio general para calcular el área de diferentes cuerpos. Si consideramos el procedimiento para obtenerla en un rectángulo, se pueden deducir procedimientos para calcularla en otras figuras.

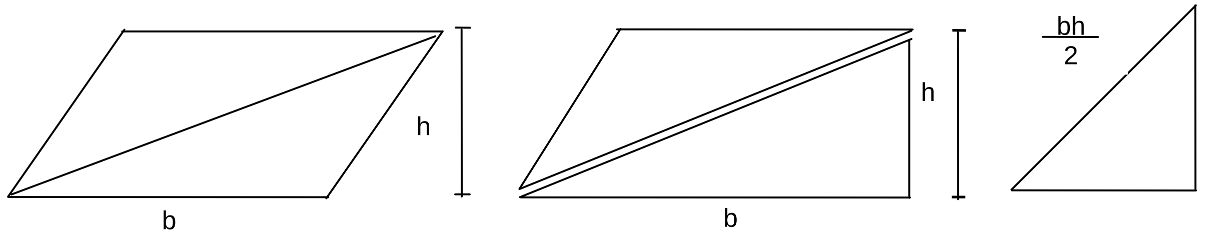
Área rectángulo **A = bh**



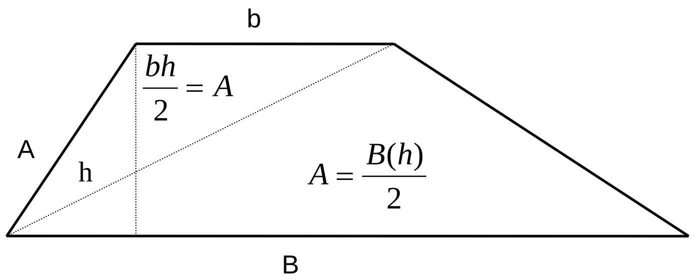
La fórmula para obtener el área del paralelogramo es la que se aplica para conocer el área del rectángulo.



El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.



Para calcular el área del trapecio, éste se divide en dos triángulos de diferente base pero de la misma altura y se suman las áreas.

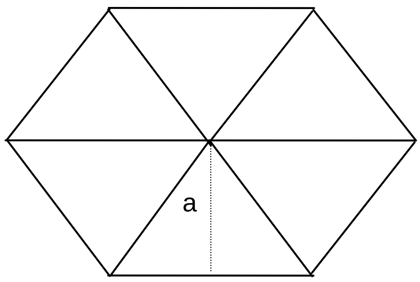


$$\frac{B(h)}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{Bh + bh}{2}$$

$$h\frac{(B+b)}{2}$$

El área de un polígono regular se obtiene uniendo el centro de cada uno de los vértices, ya que un polígono regular se puede dividir en tantos triángulos como lados tiene.

Recuerda que en un polígono regular la altura de cada triángulo se llama apotema (a); por lo tanto:



Área del hexágono = $A = \frac{Pa}{2}$

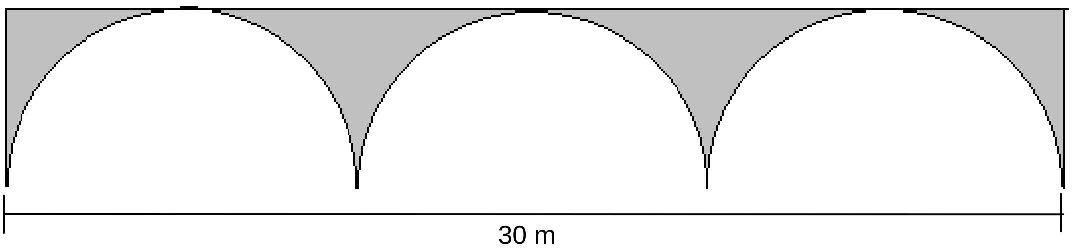
Recuerda que: *P = nl;   donde,*

P = perímetro
n = no. de lados del polígono
l = valor del lado del polígono
a = apotema

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Utilicemos las fórmulas aplicadas en el cálculo de áreas de polígonos, para encontrar el área de regiones específicas.

Se desea calcular el área a reparar de un acueducto con base en los datos de la figura.



Recuerda que el área del círculo se calcula con la fórmula $A = \pi r^2$

Analiza el procedimiento de solución.

Como el largo del acueducto es 30 m y hay tres semicírculos iguales, cada uno mide 10 m de diámetro, por lo que la altura (radio) mide 5 m, entonces:

Área a reparar = área de rectángulo menos área de círculo y medio.

$A_R = A_{\square} - 1.5\ A_{\bigcirc}$

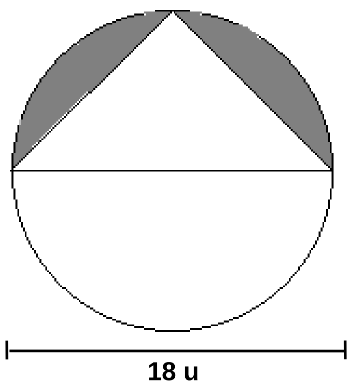
$= (30\text{ m})(5\text{ m}) - 1.5\,(3.1416)\,(5\text{ m})^2$

$= 150\text{ m}^2 - 4.7124\,(25\text{ m}^2)$

$= 150\text{ m}^2 - 117.81\text{ m}^2$

$= 32.19\text{ m}^2$; es el área del acueducto que es necesario reparar.

Analiza las figuras y calcula el área de la región sombreada.



EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención la información y coloca sobre la(s) línea(s) la(s) palabra(s) que complete(n) correctamente los enunciados.

1. La recta que corta en un punto a la circunferencia se llama _________________.

2. El segmento que va del centro a un punto extremo de la circunferencia recibe el nombre de

   ______________________.

3. El ángulo __________________ está formado por dos radios.

4. El _____________ es una porción de la circunferencia.

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y escribe en el paréntesis de la izquierda la letra de la opción que los conteste correctamente.

5. (   ) Si el área de un cuadrado es 400 u^2, entonces cada lado mide:

   a) 100 u
   b) 40 u
   c) 20 u
   d) 10 u

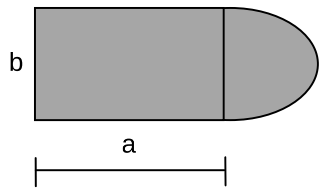
6. (   ) El área de un hexágono regular mide 84 cm^2; si cada lado mide 3.5 cm, el apotema mide:

   a) 6 cm
   b) 8 cm
   c) 8.4 cm
   d) 35 cm

7. (   ) En un triángulo rectángulo el cateto menor mide 6 cm y la hipotenusa mide 10 cm, por lo que el área es:

   a) 24 cm^2
   b) 40 cm^2
   c) 48 cm^2
   d) 60 cm^2

8. (   ) De acuerdo con la siguiente figura



¿cuál es la opción que representa el valor de su área?

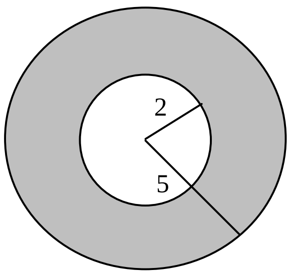
a) $b\left(a+\frac{\pi b}{4}\right)$

b) $ab + b^2$

c) $4b + \pi b$

d) $ab - b^2$

9. (   ) Observa la siguiente figura.



¿Cuál es el valor del área sombreada?

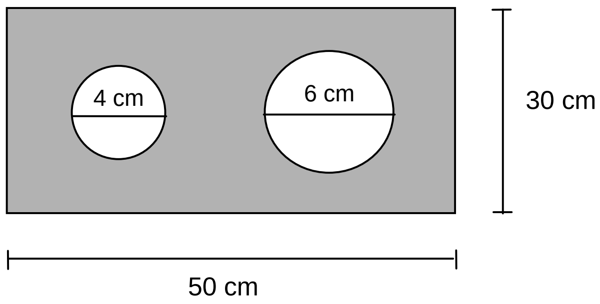
a) 19π

b) 21π

c) 29π

d) 100π

10. (   ) Analiza la figura.



Determina el valor del área sombreada (utiliza el valor de π = 3.14).

a) 1637.88 u^2
b) 1540.16 u^2
c) 1537.88 u^2
d) 1459.18 u^2

11. (   ) El perímetro de un hexágono regular que mide 3 cm por lado es:

a) 9 cm
b) 15 cm
c) 18 cm
d) 27 cm

12. (   ) El perímetro de un triángulo equilátero de 13 m por lado es:

a) 13 m
b) 26 m
c) 39 m
d) 78 m

13. (   ) ¿Cuál es el perímetro de un triángulo isósceles si su base mide 8 m y uno de sus lados iguales mide 6 m?

a) 14 m
b) 20 m
c) 22 m
d) 24 m

TABLA DE COMPROBACIÓN

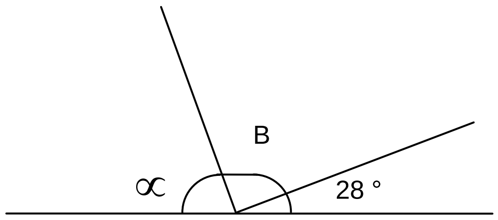
Número de pregunta	Respuesta correcta	Sugerencias
1 2 3 4	tangente radio central arco	Repasa las definiciones de los elementos del círculo.
5 6 7	c b a	Revisa el tema área de un polígono regular, en el libro Geometría y Trigonometría, de Abelardo Guzmán Herrera, páginas 82 y 83.
8 9 10	a b d	Estudia perímetro y área de la circunferencia en el libro Geometría y Trigonometría, de Abelardo Guzmán Herrera, páginas 96 y 97.
11 12 13	c c b	Repasa el concepto de perímetro.

AUTOEVALUACIÓN

Cuentas con una hora y treinta minutos para resolver todos los ejercicios.

INSTRUCCIONES: Escribe dentro del paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

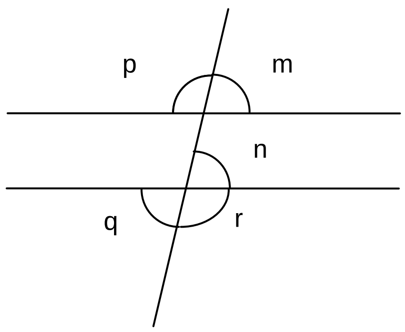
1. (   ) Analiza la figura.



Si el ángulo $\propto$ es 26^{o} más grande de lo que mide el ángulo B, ¿cuál es el valor de B?

a) B = 63^{o}
b) B = 65^{o}
c) B = 67^{o}
d) B = 117^{o}

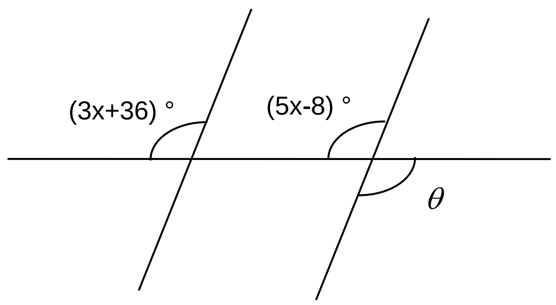
2. (   ) Analiza la figura siguiente.



Indica cuál es la pareja de ángulos correspondientes.

a) p y n
b) p y q
c) m y n
d) m y r

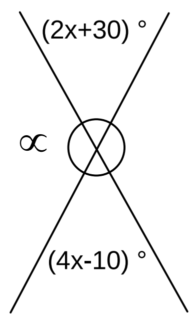
3. (   ) Analiza la siguiente figura.



¿Cuál es la magnitud del ángulo θ ?

a)   42 °
b)   55 °
c)   62 °
d) 102 °

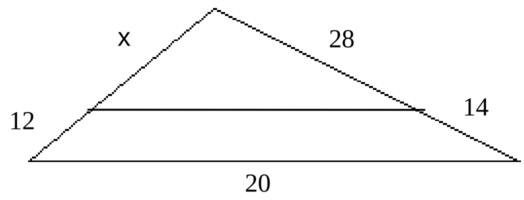
4. (   ) Analiza la siguiente figura.



¿Cuál es el valor del ángulo $\propto$?

a)   66.7 °
b)   67 °
c)   70 °
d) 110 °

5. (   ) Observa con atención la siguiente figura.



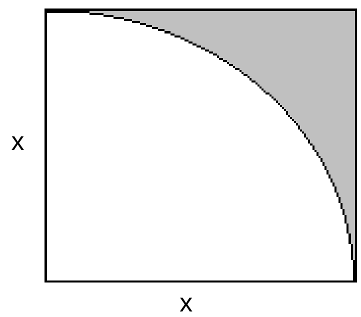
¿Cuál es el perímetro del triángulo mayor de la figura?

a) 62
b) 74
c) 78
d) 98

6. (   ) Un rectángulo mide 25 cm de diagonal y 24 cm de ancho. ¿Cuál es su perímetro?

a) 16 cm
b) 26 cm
c) 33 cm
d) 62 cm

7. (   ) Observa la siguiente figura.



¿Cuál es la expresión para calcular el área sombreada de la figura?

a) $A = x^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $A = \frac{\pi x^2}{4}$

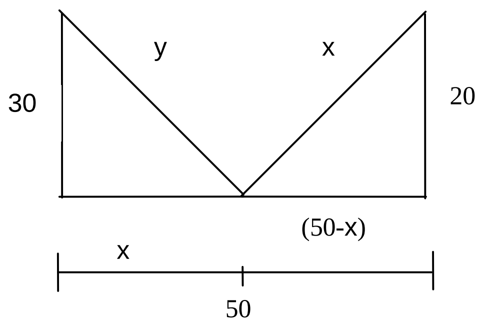
c) $A = 2x^2\ \frac{\pi}{4}$

d) $A = 2\pi\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$

8. ( ) Las alturas de un triángulo se intersectan en un punto llamado:

   a) incentro.
   b) ortocentro.
   c) circuncentro.
   d) baricentro.

9.( ) Observa la figura.



Obtén el valor de cada una de las letras.

   a) $x = 29$
      $y = 14.725$

   b) $x = 29$
      $y = 41.725$

   c) $x = 30$
      $y = 20.625$

   d) $x = 30$
      $y = 30.425$

INSTRUCCIONES: Coloca sobre la(s) línea(s) la(s) palabra(s) que complete(n) correctamente los enunciados.

10. Si sobreponemos un segmento con otro y éstos coinciden plenamente, entonces se dice que los segmentos son ____________________________ .

11. Si dos polígonos tienen sus ángulos correspondientes congruentes y los lados son proporcionales se dice que los polígonos son ______________________________ .

12. El triángulo que tiene sus tres lados con diferente medida se llama ___________________ .

13. El triángulo que tiene sus tres ángulos agudos recibe el nombre de ___________________ .

14. En un decágono el área es 350 cm^2 y cada uno de sus lados mide 10 cm, entonces la medida del apotema es ______________________________ .

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se solicita.

15. Relaciona la columna de la derecha con la columna de la izquierda colocando en el paréntesis la letra que le corresponda de acuerdo con la clasificación de los polígonos.

( ) Heptágono	A) 15 lados
( ) Icoságono	B) 11 lados
( ) Endecágono	C) 9 lados
( ) Eneágono	D) 7 lados
( ) Dodecágono	E) 12 lados
	F) 20 lados

16. Relaciona los elementos del círculo con los nombres que les correspondan de la columna de la izquierda, colocando en el paréntesis la letra correcta.

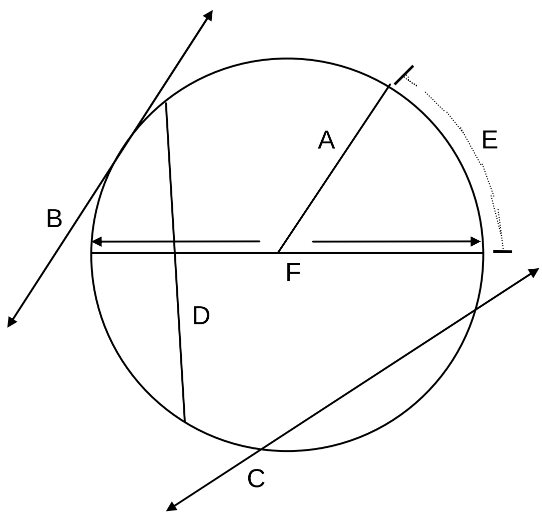
(   ) Arco.

(   ) Diámetro.

(   ) Tangente.

(   ) Secante.

(   ) Radio.



CLAVE DE RESPUESTAS

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	a
2	c
3	d
4	d
5	d
6	d
7	a
8	b
9	b
10	congruentes
11	semejantes
12	escaleno
13	acutángulo
14	siete
15	D F B C E
16	E F B C A

Unidad 2

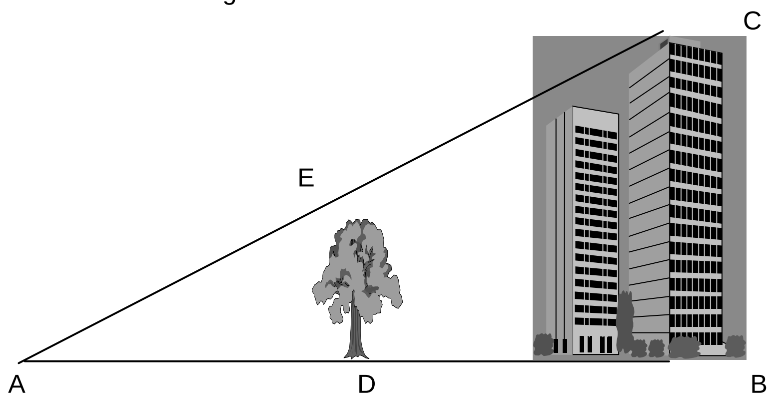
CONSTRUCCIÓN, EXPERIMENTACIÓN Y OBSERVACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LA FIGURA GEOMÉTRICA: UNA VISIÓN DINÁMICA

UNIDAD 2

2.1 La función en el estudio del triángulo: funciones trigonométricas

Aprendizajes
• Calcular las funciones trigonométricas en la solución de problemas. • Calcular las funciones trigonométricas directas e inversas. • Aplicar la ley de los senos en la solución de problemas. • Aplicar la ley de cosenos en la solución de problemas

La altura de árboles, edificios, etc. demasiado elevados puede determinarse auxiliándose con las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo, las cuales al relacionarlas con alguno de los ángulos agudos se definen como las funciones trigonométricas.



Conociendo las distancias AD, AB y la medida del $\angle A$ pueden determinarse las alturas DE y BC.

En la figura, $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, por lo que las razones entre los lados correspondientes son iguales.

Las razones $\frac{BC}{AC}$, $\frac{DE}{AE}$ son iguales y al relacionarlas con el $\angle A$, se definen como

seno del $\angle A$ (**sen A**); por lo tanto:

sen A = $\frac{BC}{AC}$;   también   sen A = $\frac{DE}{AE}$

Las razones $\frac{AB}{AC}$, $\frac{AD}{AE}$ son iguales y al relacionarlas con el $\angle A$ se definen como

coseno del $\angle A$ (**cos A**); por lo tanto:

cos A = $\frac{AB}{AC}$;   también   cos A = $\frac{AD}{AE}$

Las razones $\frac{BC}{AB}$, $\frac{DE}{AD}$ son iguales y al relacionarlas con el $\angle A$ se definen como tangente del $\angle A$ (**tan A**); por lo tanto:

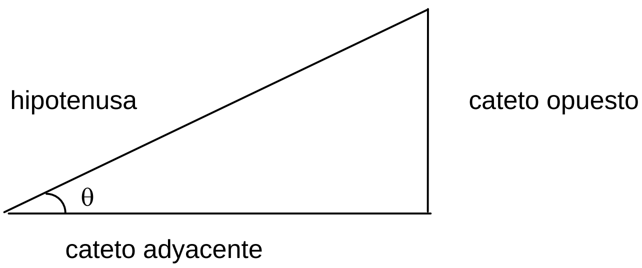
$\tan A = \frac{BC}{AB}$; también $\tan A = \frac{DE}{AD}$

En la misma figura existen otras tres relaciones con respecto al ángulo A que se definen como:

Nombre	Abreviatura
Cotangente A	$\cot A = \frac{AB}{BC}$; $\cot A = \frac{AD}{DE}$
Secante A	$\sec A = \frac{AC}{AB}$; $\sec A = \frac{AE}{AD}$
Cosecante A	$\csc A = \frac{AC}{BC}$; $\csc A = \frac{AE}{DE}$

Las relaciones son funciones del ángulo A y reciben el nombre de ***funciones trigonométricas.***

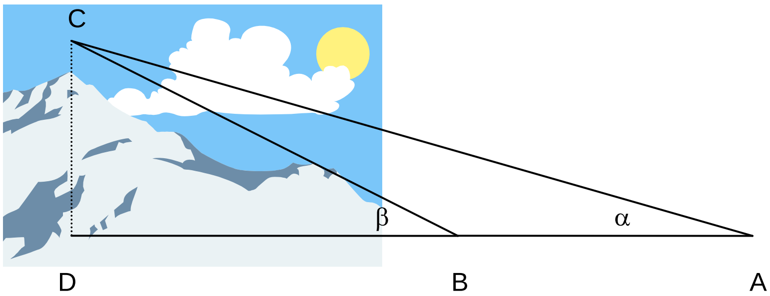
Si nos apoyamos en un triángulo rectángulo, como lo muestra la figura, obtenemos los elementos para encontrar las ***definiciones de las funciones trigonométricas***.



Las funciones trigonométricas se pueden definir de la siguiente manera:

Funciones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo	
$\text{sen}\ \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\csc \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$
$\cos \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$
$\tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\cot \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

Los conocimientos anteriores son especialmente útiles en los casos en que se presentan problemas de medición, por existir obstáculos como pantanos, lagos, barrancos, colinas, etc.



Para resolver cualquier problema donde se involucre un triángulo oblicuo y se conozca el valor de dos lados cualesquiera y el ángulo opuesto a uno de dichos lados o dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos, se aplica **la ley de los senos**; así, para calcular la altura CD del volcán es conveniente utilizar el triángulo oblicuo ABC, ya que si determinamos el valor del lado BC y conocidos los ángulos α, β, el lado AB y aplicando después la función seno del ángulo β podremos calcular la medida de la altura del volcán.

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \quad \text{ó} \qquad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Si en un triángulo oblicuo se conocen las medidas de los tres lados o dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, se aplica **la ley de los cosenos.**

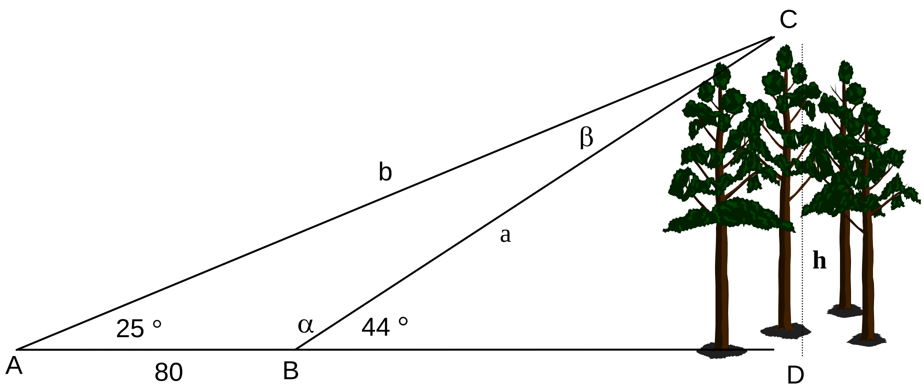
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Se dice que los árboles más grandes del mundo están en el Parque Nacional de Redwood en California. Para calcular la altura de uno de esos árboles utilizando los datos de la figura, se utiliza la definición de ángulos suplementarios y el teorema de suma de ángulos interiores de un triángulo.



Analiza el procedimiento de solución.

$\angle\alpha + 44° = 180°$ por ser suplementarios

$\angle\alpha = 180° - 44°$ despejando $\angle\alpha$

$\angle\alpha = 136°$

$25° + \angle\alpha + \angle\beta = 180°$

$25° + 136° + \angle\beta = 180°$

$\angle\beta = 180° - 161°$

$\angle\beta = 19°$

Aplicando la **ley de senos** para calcular el valor de **a** en el triángulo ABC:

$$\frac{a}{sen\,25°} = \frac{80}{sen\,19°} =$$

despejando a:

$$a = \frac{80\,(sen\,25)°}{sen\,19°} =$$

$$\frac{80(0.4226)}{0.3256} =$$

$$\frac{33.808}{0.3256} =$$

103.83 m

para determinar la altura se emplea la función seno en el $\angle$ BCD

$$sen\,44° = \frac{h}{a}$$

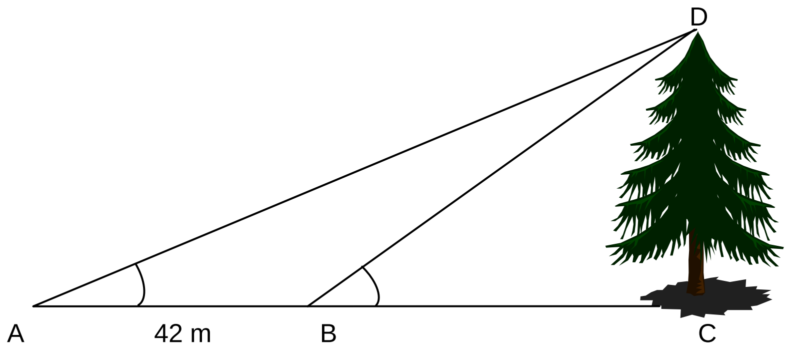
a(sen 44) ° = h

0.6947(103.83) = h

72.13 m = h; es la altura del árbol

UNIDAD 2

El ángulo **A** es de 35 º y el ángulo **B** mide 50 º, ¿a qué distancia está el punto **B** de la base del árbol?

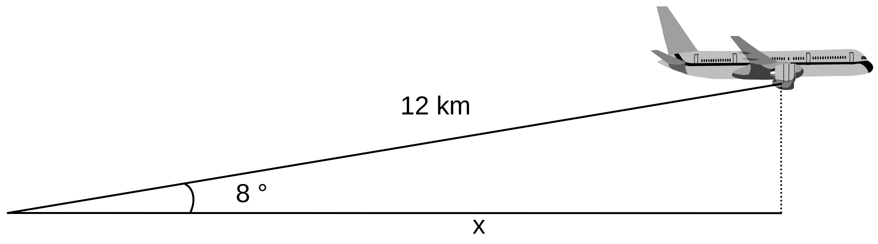


EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Analiza cada reactivo con la figura que le corresponde y coloca en el paréntesis de la izquierda la letra de la opción que lo conteste correctamente.

NOTA: utiliza hasta 4 dígitos después del punto decimal para los valores de las funciones trigonométricas.

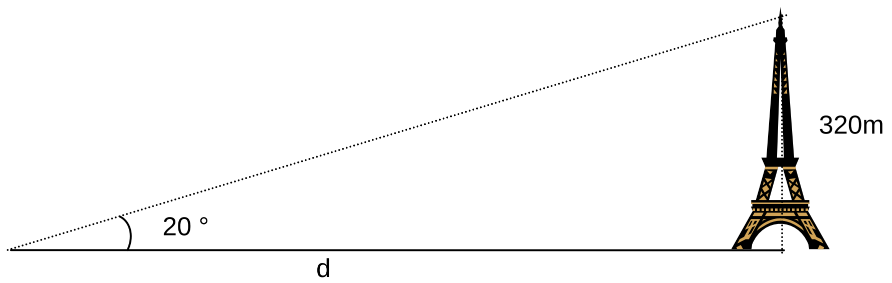
1. ( ) Un avión despega con un ángulo de elevación de 8 grados.



La distancia "x" que recorre después de volar 12 km es:

a) 1.8 km
b) 11.88 km
c) 118 km
d) 188.8 km

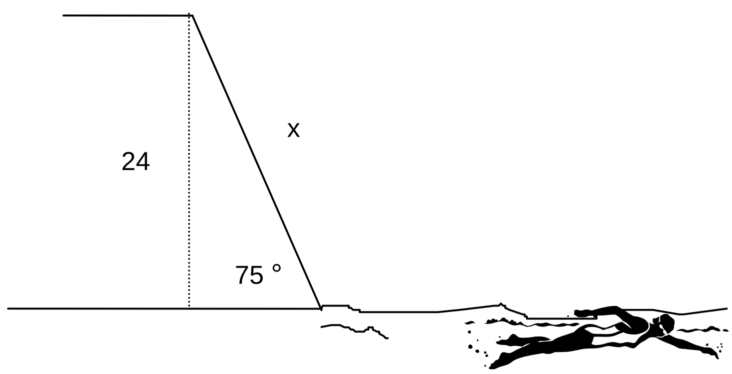
2. ( ) La Torre Eiffel tiene una altura de 320 m como se muestra en la figura.



¿Cuál es la distancia a la que deberá colocarse una persona si se desea observarla con un ángulo de elevación de 20 grados?

a) 87.19 m
b) 320 m
c) 879.19 m
d) 892 m

3. (   ) Observa la siguiente figura.



¿Cuál es el valor de “x”?

a) 6.43 m
b) 24.84 m
c) 64.3 m
d) 92.73 m

4. (   ) El valor de cot 30 ° es:

a) 1.2370
b) 1.3270
c) 1.7230
d) 1.7320

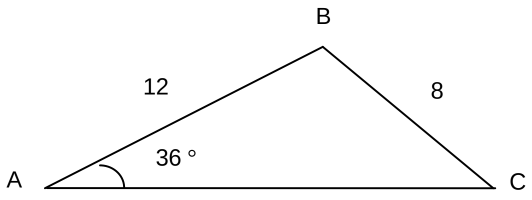
5. (   ) El valor de csc 52 ° es:

a) 1.2690
b) 1.2960
c) 1.6920
d) 1.9620

6. (   ) El valor de sec 56 ° es:

a) 1.3788
b) 1.7883
c) 1.8387
d) 1.8837

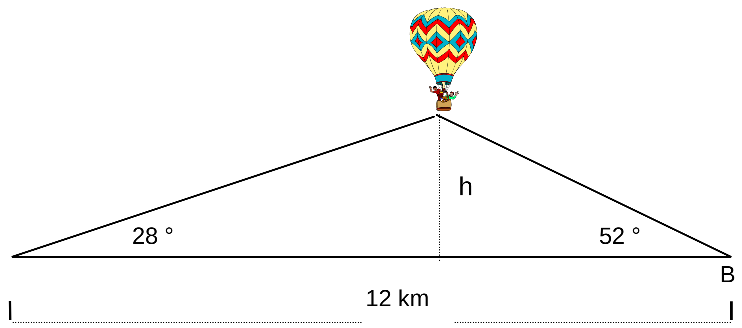
7. (   ) Analiza la siguiente figura.



La medida del ángulo C es:

a) 23 ° 04´
b) 48 ° 35´
c) 50 ° 00´
d) 61 ° 50´

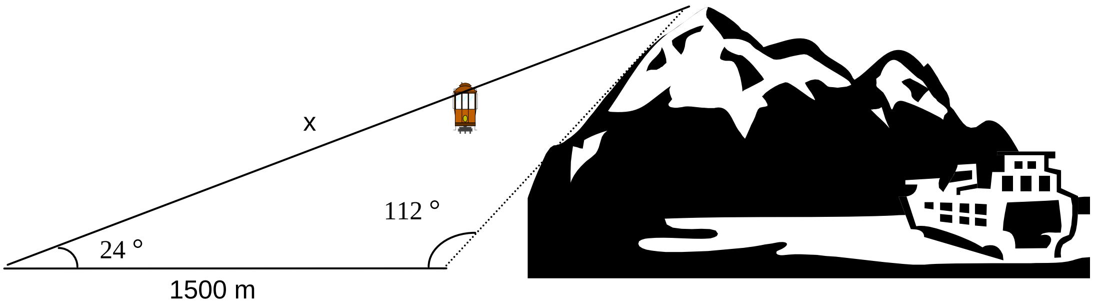
8. (   ) Observa detenidamente la siguiente figura.



La altura h del globo sobre el suelo es:

a) 7.26 km
b) 5.72 km
c) 4.93 km
d) 4.51 km

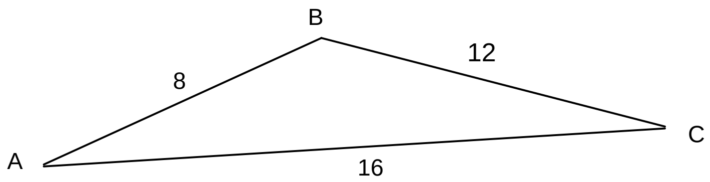
9. ( ) Observa detenidamente la siguiente figura.



La distancia que recorre el teleférico es:

a) 1370.32 m
b) 1641.95 m
c) 2002.10 m
d) 3687.89 m

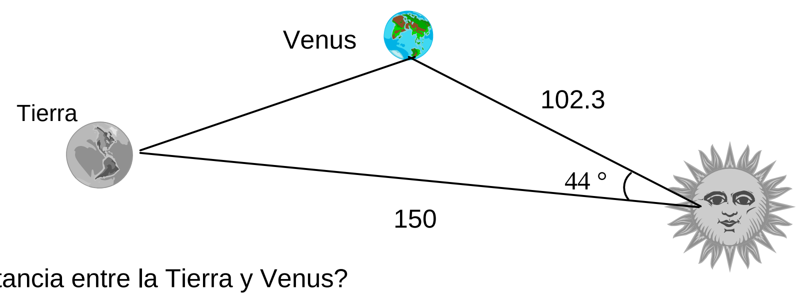
10. Analiza los datos del siguiente trángulo.



La medida del ángulo A es:

a) 46 ° 57'
b) 46 ° 34'
c) 43 ° 43'
d) 43 ° 25'

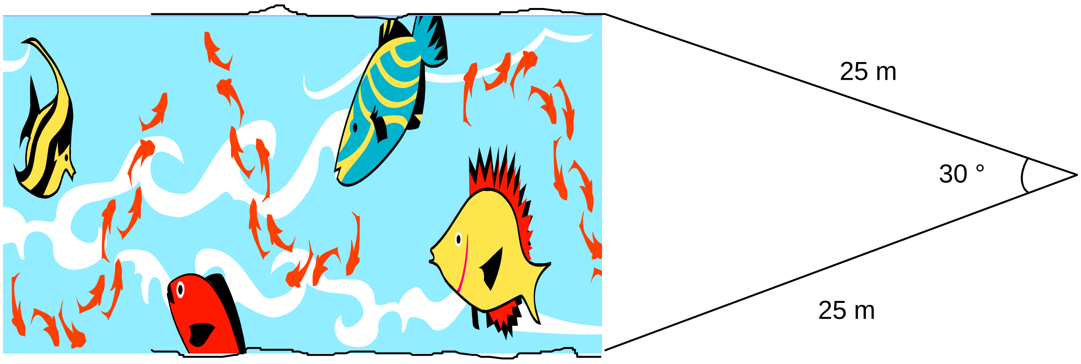
11. ( ) Analiza la figura (los datos están en millones de kilómetros).



¿Cuál es la distancia entre la Tierra y Venus?

a) 104.04
b) 104.35
c) 22500.543
d) 30600.664

12. (   ) Analiza la figura.



El ancho del río es:

a) 48.30 m
b) 48 m
c) 12.94 m
d) 12 m

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta	Sugerencias
1 2 3	b c b	Aplica las funciones trigonométricas directas.
4 5 6	d a b	Revisa la definición de las funciones trigonométricas.
7 8 9	d d c	Para la solución debes emplear la ley de senos. Utiliza hasta cuatro dígitos después del punto decimal.
10 11 12	b b c	Para la resolución emplea ley de cosenos. Utiliza hasta cuatro dígitos después del punto decimal.

2.2 Los vectores: un puente con el álgebra

Aprendizajes
• Representar gráficamente las características de un vector. • Operar con vectores en el plano.

En mecánica, ingeniería y física es necesario tratar con fuerzas y velocidades. ***Toda cantidad física, como la fuerza y la velocidad, que posee magnitud, dirección y sentido recibe el nombre de cantidad vectorial.***

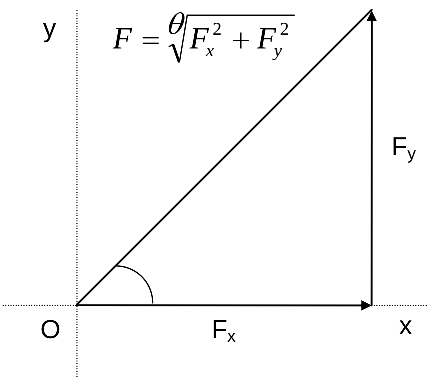
Una cantidad vectorial se puede representar matemáticamente por un segmento de recta dirigido (flecha) llamado: ***vector.***

Usaremos el símbolo $\longrightarrow$ para representar un vector.

La dirección y sentido del vector son los de la cantidad dada, y la longitud del vector es proporcional a la magnitud de la cantidad.

Componentes de un vector.

Las componentes de un vector más comúnmente usadas son las rectangulares. En el caso especial en que F_x y F_y son perpendiculares, se usa el Teorema de Pitágoras para calcular la magnitud de la resultante.



Para calcular la magnitud de la resultante F, observamos que:

$$F = F_x^{\,2} + F_y^{\,2}$$

$$\therefore F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} =$$

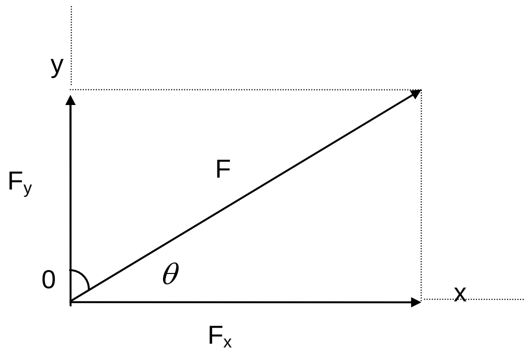
Para determinar la dirección de la resultante F, necesitamos hallar el ángulo θ

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x}$$

Cualquier fuerza o velocidad puede descomponerse en dos componentes a lo largo de un par de rectas perpendiculares; es decir, en una componente horizontal y una componente vertical.

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Una fuerza de F kilogramos está tirando de O en la dirección que se muestra, con un ángulo de θ grados con la horizontal. La componente horizontal de F es igual a F_x y la componente vertical de F es igual a F_y.



Empleando las definiciones de las funciones seno y coseno:

$$Cos\ \theta = \frac{F_x}{F} \quad \therefore \quad F_x = F\ \cos\ \theta$$

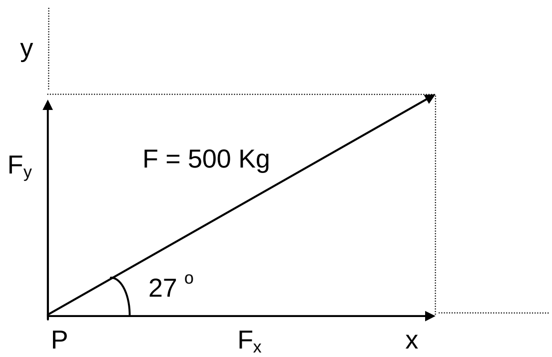
$$Sen\ \theta = \frac{F_y}{F} \quad \therefore \quad F_y = F\ \text{sen}\ \theta$$

Si F = 200 kg y θ = 25 °, obtenemos:

F_x = F cos 25 ° = (200) (0.9063) = 181.3 kg.

F_y = F sen 25^o = (200) (0.4226) = 84.5 kg.

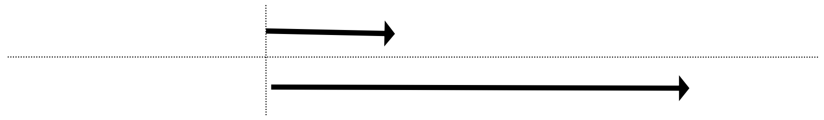
Un tractor está arrastrando una carga P con una fuerza de 500 kg, con un ángulo de 27º con la horizontal. Encontrar las componentes horizontal y vertical de esta fuerza.



EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada reactivo y coloca en el paréntesis de la izquierda la letra de la opción que lo conteste correctamente.

1. (   ) Analiza la figura.



Si el vector pequeño tiene una fuerza de 4.06 newtons (N) y el vector mayor es de 15.4 newtons (N), la resultante mide:

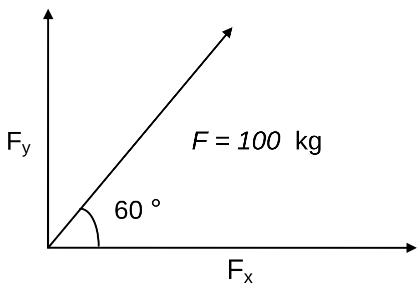
a) 10.34 N
b) 19.46 N
c) 19.64 N
d) 20 N

2. (   ) Analiza la figura.

Si el vector pequeño tiene una fuerza de 6.8 newtons y el vector mayor es de 22.4 newtons, la resultante mide:

a) -29.2 N
b) -15.6 N
c) 15.6 N
d) 29.2 N

3. (   ) Analiza la figura.



El valor de las componentes vertical y horizontal son:

a) $F_x = 40$ kg
   $F_y = 60$ kg

b) $F_x = 50$ kg
   $F_y = 50$ kg

c) $F_x = 50$ kg
   $F_y = 86.6$ kg

d) $F_x = 86.6$ kg
   $F_y = 50$ kg

INSTRUCCIONES: Coloca sobre la(s) línea(s) la(s) palabra(s) que complete(n) correctamente los enunciados.

4. Una cantidad _______________ posee magnitud, dirección y ___________________________.

5. Las componentes de un vector se llaman componentes________________________________.

6. La resultante de un vector se puede calcular aplicando_________________________________.

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada reactivo y coloca en el paréntesis de la izquierda la letra de la opción correcta.

7. (   ) El mango de una podadora forma un ángulo de 53 ° con la horizontal, un hombre empuja en la dirección del mango con una fuerza de 40 kg. Encontrar la fuerza hacia adelante y la presión vertical hacia abajo del mango.

a) Fx=24.07 kg
Fy=31.945 kg

b) Fy=24.07 kg
Fx=31.941 kg

c) Fx=24 kg
Fy=32 kg

d) Fy=24 kg
Fx=32 kg

8. (   ) Un bote motor se enfila directamente hacia el este para atravesar un río con una velocidad de 475 metros por minuto, pero la corriente lo lleva aguas abajo a una velocidad de 125 metros por minuto. ¿Cuál será el valor de la resultante?

a) 441.59 m
b) 491.17 m
c) 175703 m
d) 195000 m

9 (   ) Se dispara un proyectil de un cañón inclinado en un ángulo de 25 º con la horizontal. El proyectil deja la boca del cañón con una velocidad de 100 metros por segundo.
¿A qué velocidad se está moviendo horizontalmente?

a) 91 m/s
b) 90.63 m/s
c) -90.63 m/s
d) -91 m/s

TABLA DE COMPROBACIÓN

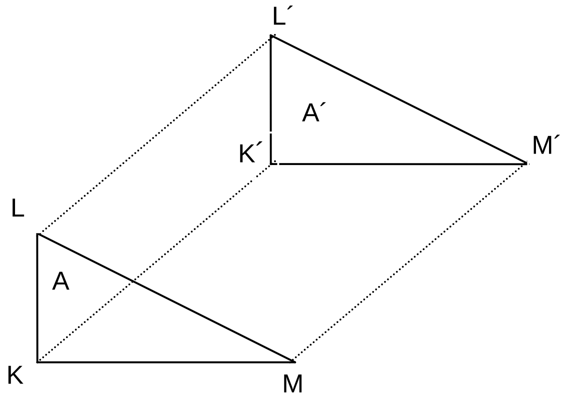
Número de pregunta	Respuesta correcta	Sugerencias
1 2 3	b b c	Realiza una suma algebraica para calcular los valores de la resultante y repasa cómo calcular las componentes de un vector.
4 5 6	Vectorial, sentido, rectangulares Teorema de Pitágoras	Revisa las definiciones de las características de un vector.
7 8 9	a b b	Construye las componentes horizontales y verticales y emplea la ecuación para calcular sus componentes (Teorema de Pitágoras).

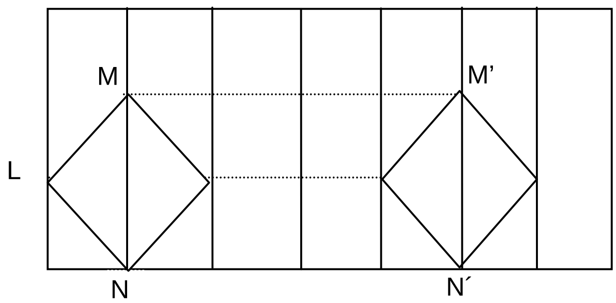
2.3 El movimiento de las figuras geométricas: transformaciones

Aprendizajes
• Comprender las transformaciones geométricas en el plano hasta la simetría bilateral. • Aplicar la traslación de una figura en el plano. • Aplicar la rotación de una figura en el plano. • Aplicar la reflexión de una figura en el plano.

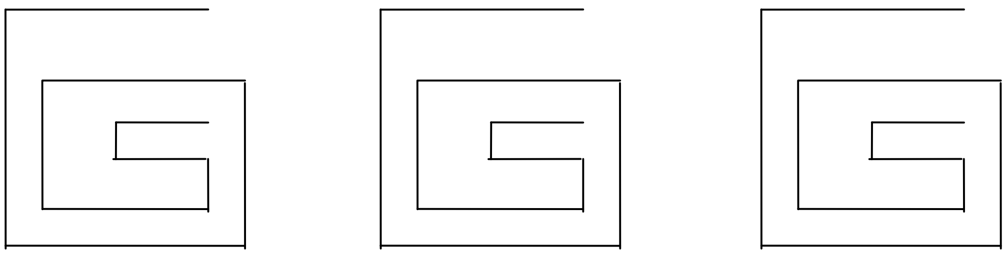
Existe un postulado de movimiento que nos indica ***“Toda figura geométrica puede moverse o desplazarse sin cambiar de forma ni de tamaño”.***

Una traslación se obtiene cuando una figura se mueve hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha, o bien en cualquier dirección que pueda alcanzarse al combinar dos traslaciones; por ejemplo:

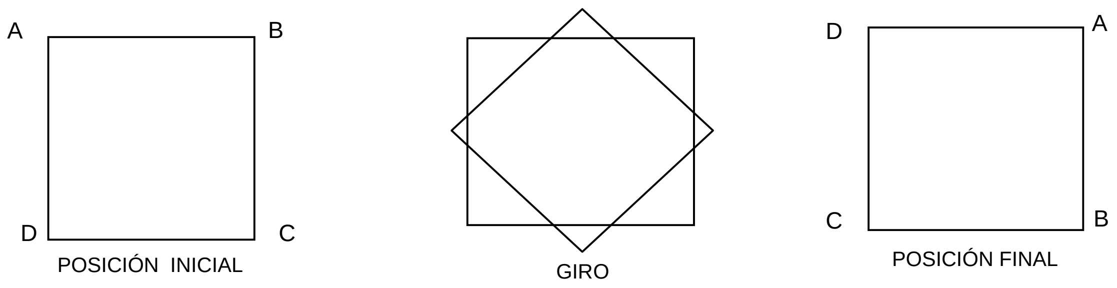




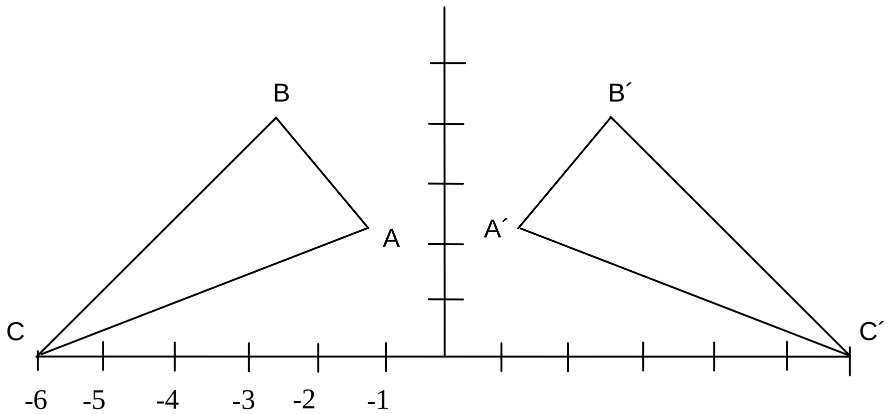
Cuando realizas traslaciones también puedes obtener figuras decorativas.



Cuando vas a la feria te diviertes observando el carrusel, la rueda de la fortuna o alguno de los juegos que están girando, incluso podemos pensar en algo más simple. Observa el segundero de tu reloj, a este movimiento se le denomina rotación; si el giro ***ocurre en el sentido contrario*** **a las manecillas del reloj se denomina giro de rotación directo o levógiro** y si es ***en el mismo sentido de las manecillas del reloj*** **se denomina giro de rotación inverso o dextrógiro.**



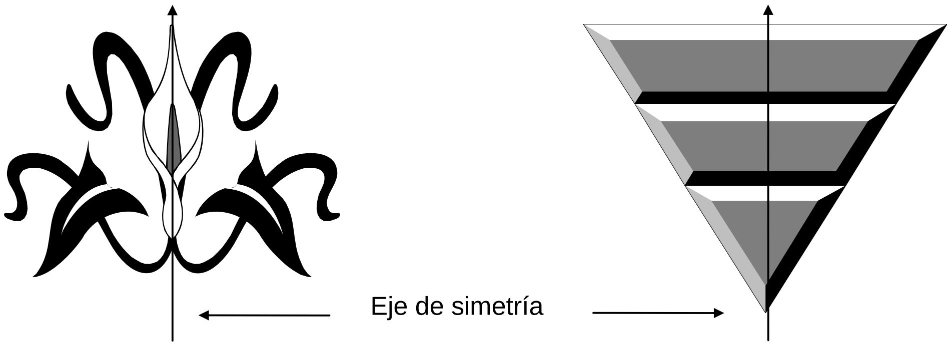
Otro ejemplo de movimiento sería el que parece producirse cuando vemos figuras reflejadas en un espejo. Observa la siguiente figura:



También existen figuras en las cuales si se traza una línea vertical u horizontal y se dobla sobre esta línea se obtienen dos partes iguales. Esta transformación en la cual cada punto de una figura se refleja en otro punto de otra figura idéntica (llamada imagen) a la original se denomina ***simetría.***

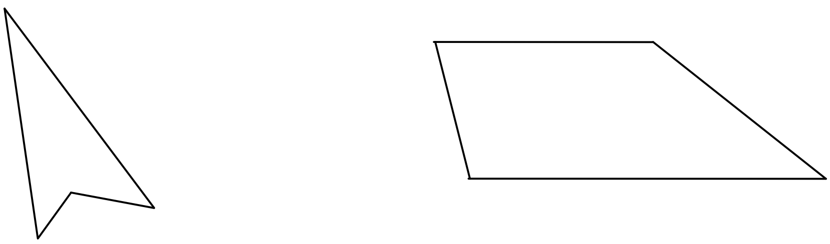
Eje de simetría

Es una **línea recta que divide en dos partes iguales una figura**. Las figuras simétricas son iguales si se hacen coincidir por medio de un doblez en el eje de simetría, por ejemplo:

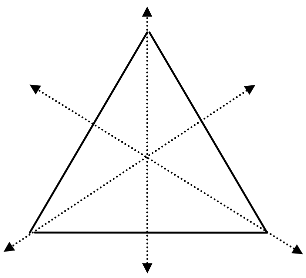


A una figura que **no se le puede trazar eje de simetría**, se le llama figura **asimétrica.**

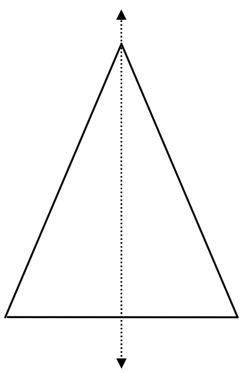
FIGURAS ASIMÉTRICAS



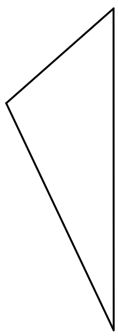
EJES DE SIMETRÍA DE TRIÁNGULOS



El **triángulo equilátero** tiene **3 ejes de simetría**.



El **triángulo isósceles** tiene **un eje de simetría**.

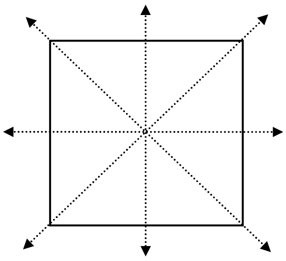


El **triángulo escaleno no tiene eje de simetría.**

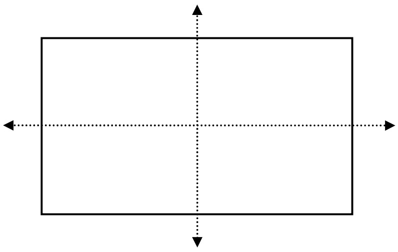
Un triángulo sólo puede tener un eje de simetría (si es isósceles), tres ejes de simetría (si es equilátero) o ningún eje de simetría (si es escaleno). No es posible que un triángulo tenga exactamente dos ejes de simetría.

Un triángulo isósceles tiene un eje de simetría que es la altura correspondiente al lado desigual.

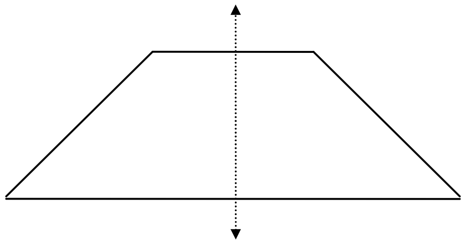
EJES DE SIMETRÍA DE CUADRILÁTEROS



El **cuadrado** tiene **4 ejes de simetría**.

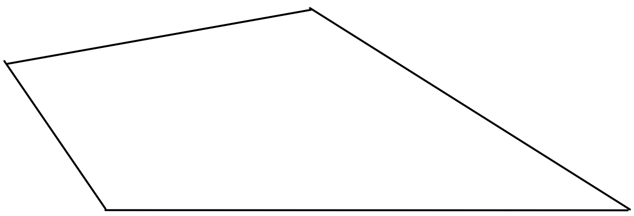


El **rectángulo** tiene **2 ejes de simetría**.



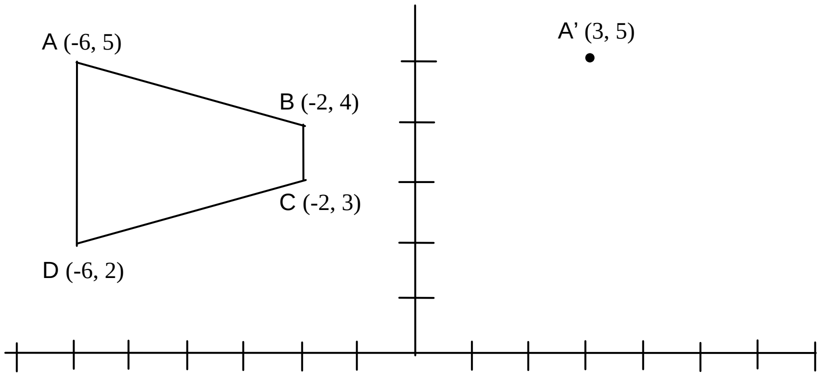
El **trapecio isósceles** tiene **un eje de simetría**.

El **trapezoide no tiene ejes de simetría.**



APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Veamos ahora cómo se realiza una traslación. El propósito de la misma es mover una figura a otro lugar, para lo cual debemos conocer las coordenadas de los vértices de la figura a trasladar y un punto inicial de la nueva ubicación de la figura.



Si analizas la figura, el desplazamiento de **A** a **A'** para el eje "**x**" es de 9 unidades, pero la altura es la misma, es decir, se desplaza cero unidades para el eje "**y**". Veamos cómo se obtienen estos valores. Si restamos las coordenadas de **A'** menos las coordenadas de **A** tenemos que:

para **x** $3 - (-6) = 3 + 6 = 9$ a esta diferencia en **x** le llamamos **h**, es decir, **h** = 9

para **y** $5 - 5 = 0$ a esta diferencia en **y** le llamamos **k**, es decir, **k** = 0

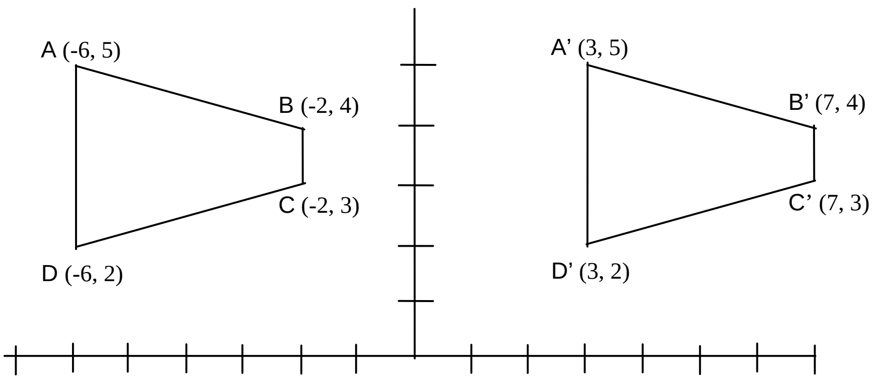
Para determinar las coordenadas de los puntos **B', C', D'** debemos sumar los valores de **h, k** a las coordenadas de cada punto **B, C, D,** es decir:

B' (-2 + 9,4 + 0) ; **B'** (7,4)

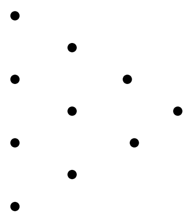
C' (-2 + 9,3 + 0) ; **C'** (7,3)

D' (-6 + 9,2 + 0) ; **D'** (3,2)

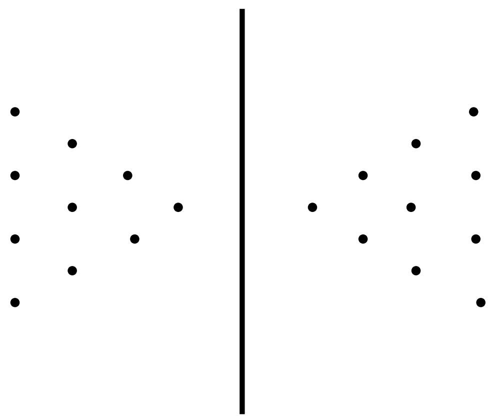
Al graficar los puntos **B', C'** y **D'** en el plano cartesiano tenemos la traslación de la figura **ABCD.**



Analiza la disposición de los puntos.



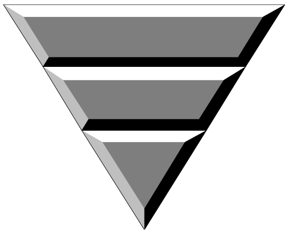
Mueve tres de ellos y obtén la reflexión que se muestra a continuación.



EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos y escribe dentro del paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

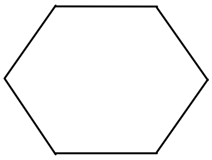
1. (   ) Observa con cuidado la siguiente figura.



¿Cuántos ejes de simetría tiene?

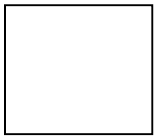
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

2. (   ) El número de ejes de simetría del hexágono es:



a) 3
b) 4
c) 5
d) 6

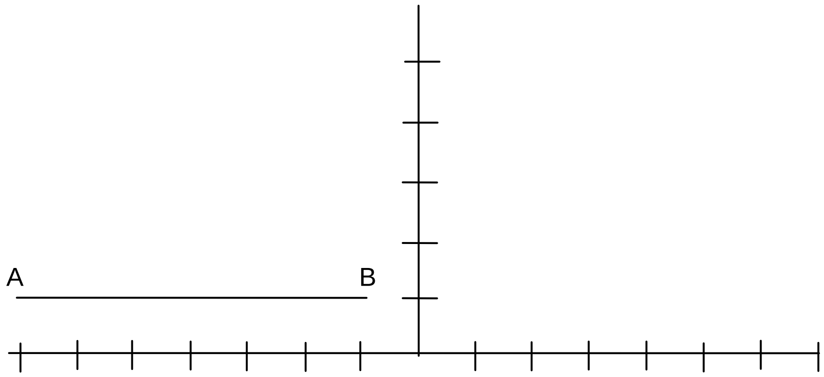
3. (   ) El número de ejes de simetría del cuadrado es:



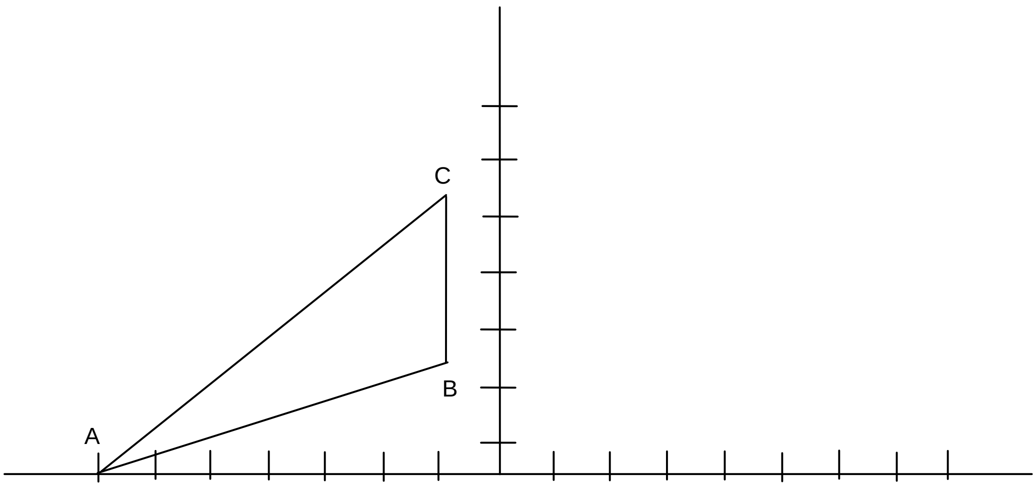
a) 4
b) 6
c) 8
d) 12

INSTRUCCIONES: Realiza la traslación que se indica en cada caso.

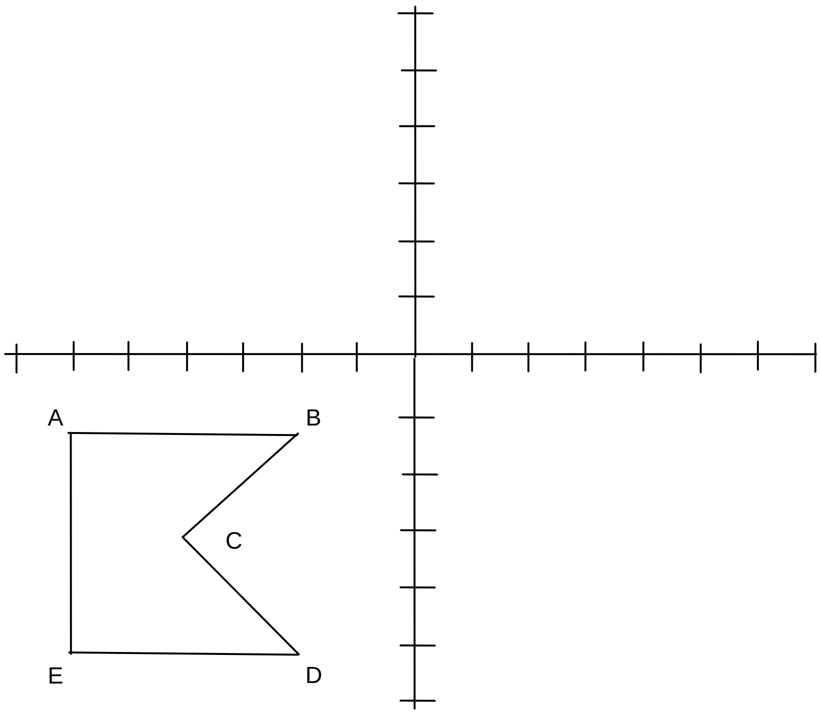
4. Los extremos del segmento son: A (-7,1) ; B(-1,1), y los extremos de A’ (1,2).



5. Sean A (-7,0), B(-1,2) y C(-1,5) los vértices de un triángulo y los vértices de A’ (2, 2).



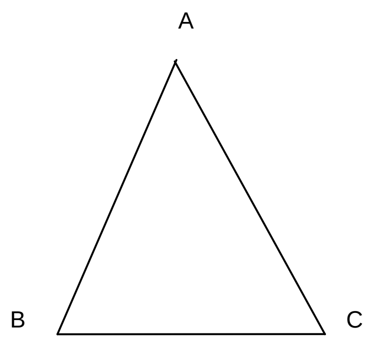
6. Los vértices del polígono son: A (-6,-1), B (-2,-1), C (-4,-3), D (-2,-5) y E (-6,-5) y los vértices de A' son (3, 6).



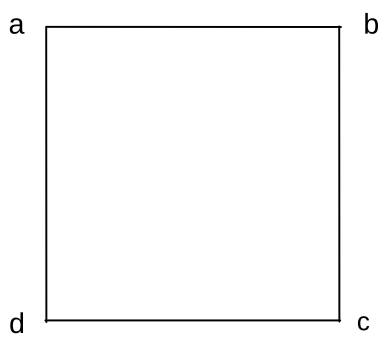
INSTRUCCIONES: Realiza la rotación de la figura de acuerdo con los grados que se indican, en el sentido de las manecillas del reloj.

7. Giro de 90 ° para el segmento de recta OA.

8. Giro de 180 °.

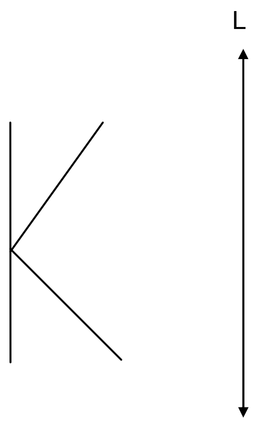


9. Giro de 45 ° .

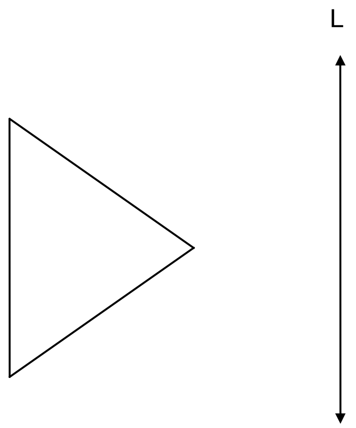


INSTRUCCIONES: En los reactivos 10, 11 y 12 dibuja sobre la recta L la imagen reflejada en cada figura.

10.



11.



12.

UNIDAD 2

TABLA DE COMPROBACIÓN

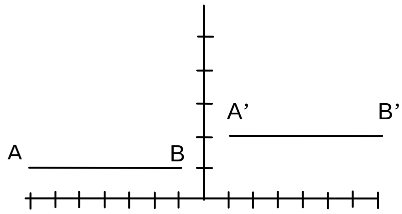
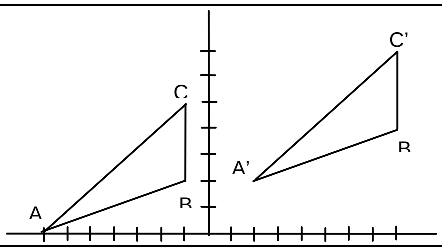
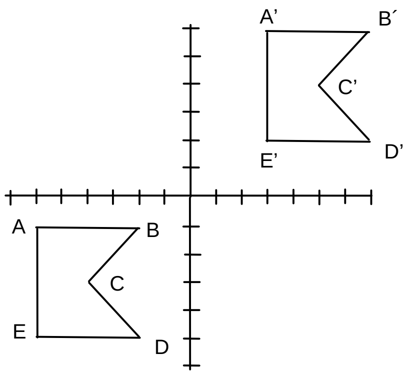
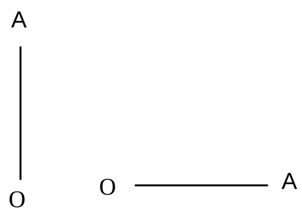
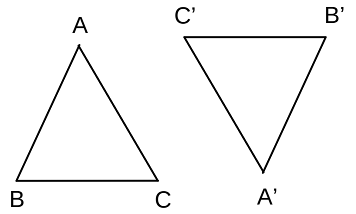
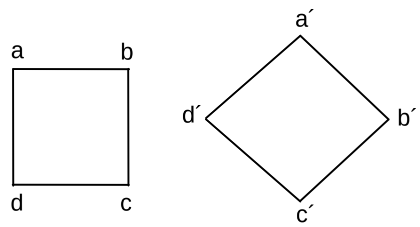
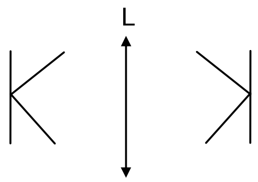
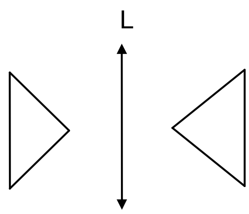
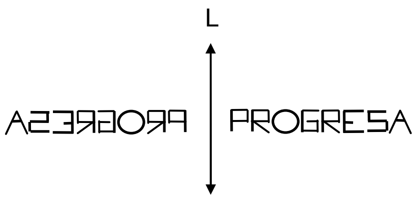
Número de pregunta	Respuesta correcta	Sugerencias
1 2 3	b d a	Repasa los conceptos de simetría proporcionados en la guía.
4		Estudia traslación de figuras en el libro Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas, de R. Clemens, páginas 484 y 485.
5		Estudia traslación de figuras en el libro Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas, de R. Clemens, páginas 484 y 485.
6		Estudia rotación de figuras en el libro Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas, de R. Clemens y otros, páginas 488 y 489.
7		Estudia rotación de figuras en el libro Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas, de R. Clemens y otros. Páginas 488 y 489.

TABLA DE COMPROBACIÓN

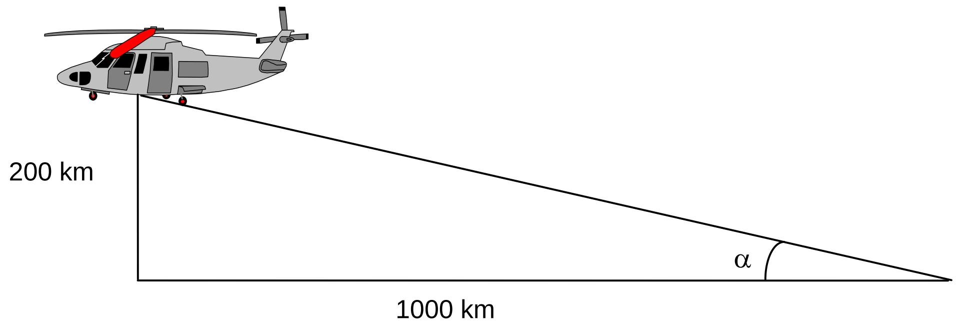
Número de pregunta	Respuesta correcta	Sugerencias
8		Estudia rotación de figuras en el libro Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas, de R. Clemens y otros, páginas 488 y 489.
9		
10		Coloca las figuras de las preguntas frente a un espejo para que compares las respuestas que proporcionaste.
11		
12		

AUTOEVALUACIÓN

Cuentas con una hora y treinta minutos para contestar todos los reactivos.

INSTRUCCIONES: Lee atentamente los siguientes reactivos y anota en el paréntesis de la izquierda la letra que los conteste correctamente.

1. ( ) Analiza la siguiente figura.



¿Cuánto mide el ángulo α?

a) 11 °
b) 11 ° 18’
c) 78 °
d) 78 ° 27’

2. ( ) En un terreno triangular los lados miden 320, 480 y 500 m, respectivamente; entonces sus ángulos miden:

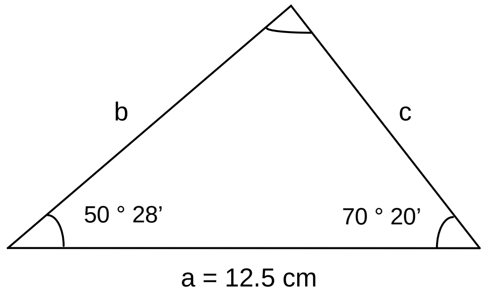
a) 38 ° 4’
70 ° 42’
51 ° 14’

b) 67 ° 35’
50 ° 12’
62 ° 13’

c) 74 ° 21’
60 ° 24’
35 ° 15´

d) 74 ° 21’
67 ° 35’
38 ° 4’

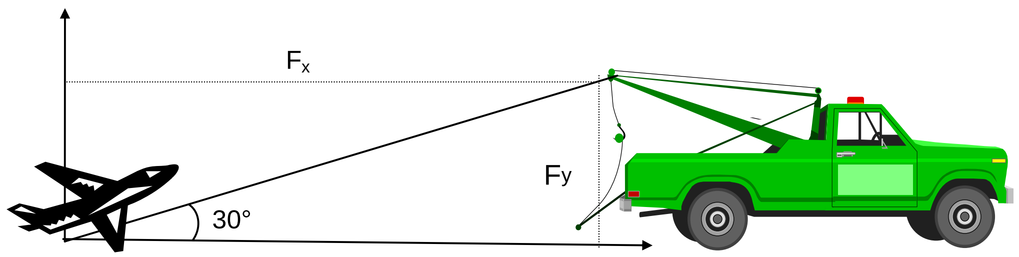
3. (   ) Analiza el siguiente triángulo oblicuángulo.



¿Cuál es su perímetro?

a) 22.14 cm
b) 28.05 cm
c) 37.42 cm
d) 45.24 cm

4. (   ) En la siguiente figura una grúa arrastra un avión, a escala de 1000 kg, con un ángulo de elevación de 30 º.



Los valores de las componentes horizontal y vertical son:

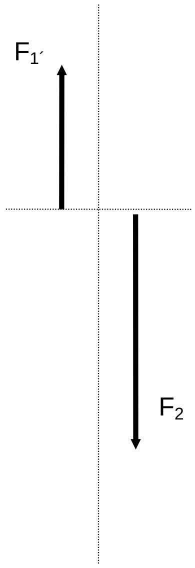
a) F_y = 115.7 kg
F_x = 2000 kg

b) F_y = 500 kg
F_x = 866.03 kg

c) F_y = 866.03 kg
F_x = 500 kg

d) F_y = 2000 kg
F_x = 1154.70 kg

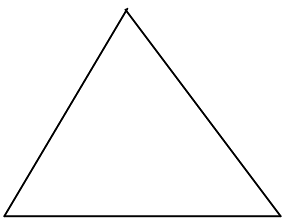
5. (   ) Analiza la figura donde el vector pequeño tiene una fuerza de 3.7 **N** y la fuerza del vector mayor es 7.3 **N**.



¿Cuál es el valor de la resultante?

a) -11
b) -3.6
c) 3.6
d) 11

6. (   ) Observa el siguiente triángulo.



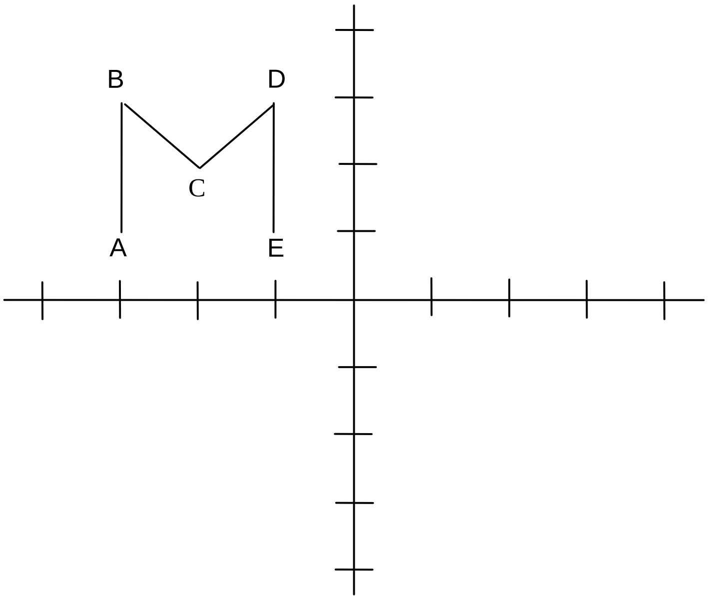
¿Cuántos ejes de simetría tiene?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

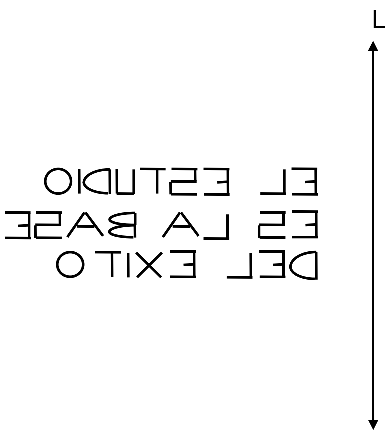
INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se solicita en cada caso.

7. Completa la frase: la velocidad es una magnitud ______________________.

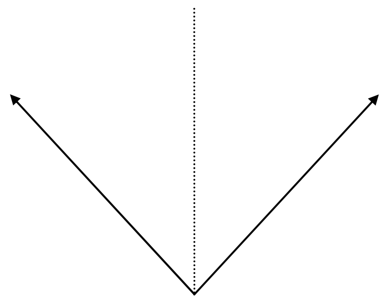
8. La siguiente figura tiene como coordenadas: A (-3, 1), B (-3, 3), C (-2, 2), D (-1, 3) y E (-1, 1); si las coordenadas para D’ son (4, -2), encuentra y traza la nueva posición de la figura.



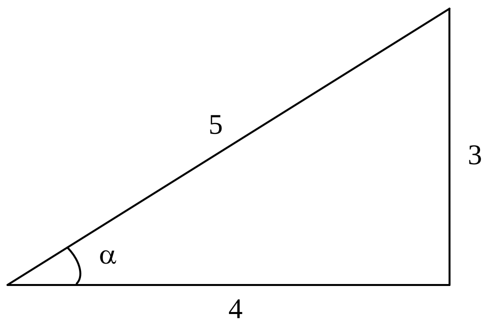
9. Traza la imagen de la figura que se refleja sobre la recta L.



10. Dibuja la figura con una rotación de 90 ° .

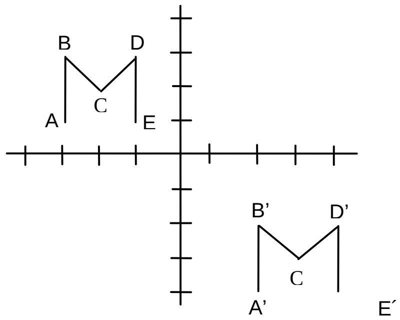
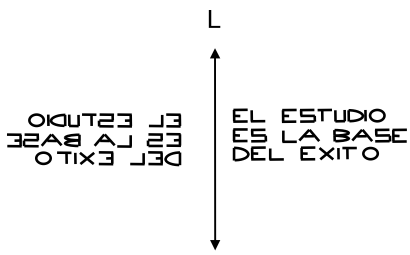


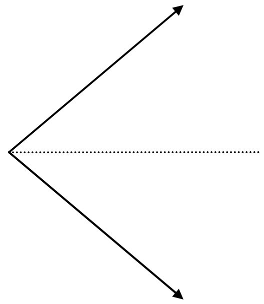
11. Empleando las funciones trigonométricas, relaciona las columnas con base en el triángulo rectángulo.



( ) 3/4	A) sen α
( ) 5/3	B) cos α
( ) 3/5	C) tan α
( ) 4/5	D) cot α
( ) 5/4	E) sec α
	F) csc α

CLAVE DE RESPUESTAS

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	b
2	d
3	c
4	b
5	b
6	c
7	vectorial
8	
9	

Número de pregunta	Respuesta correcta
10	
11	C F A B E

Unidad III

ORGANIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO: EL MÉTODO AXIOMÁTICO

3.1 Tipos de razonamiento: deductivo e inductivo

Aprendizajes
• Aplicar el razonamiento inductivo en la solución de problemas geométricos sencillos. • Aplicar el razonamiento deductivo en la solución de problemas geométricos sencillos. • Construir demostraciones sencillas de situaciones geométricas.

Si observas cuidadosamente el triángulo que se va formando con los números y las sumas correspondientes de cada renglón:

Triángulo de Pascal	**suma**
1 1	2
1 2 1	4
1 3 3 1	8
1 4 6 4 1	16
1 5 10 10 5 1	32

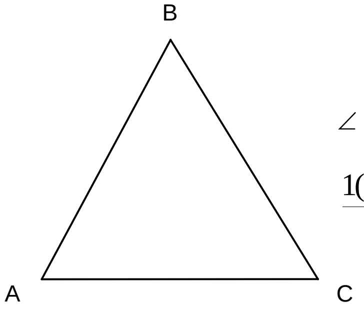
Puedes concluir que las siguientes dos filas del triángulo con sus respectivas sumas son:

1 6 15 20 15 6 1	64
1 7 21 35 35 21 7 1	128

Es muy común que las personas emitan juicios basados en sus observaciones, es decir, sacan conclusiones al notar que repitiendo en varias ocasiones una acción siempre se pueden inducir los resultados. A este tipo de razonamiento se le llama **razonamiento inductivo**.

En geometría es necesario admitir algunas proposiciones como ciertas, sin necesidad de comprobarlas. Estas proposiciones se llaman **postulados**, que son utilizados en la demostración de **teoremas**. A un razonamiento así se le llama **razonamiento deductivo**, por ejemplo:

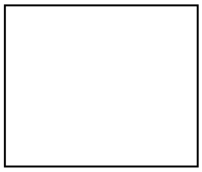
En un triángulo equilátero la suma de los ángulos interiores es 1(180°); por ser congruentes miden lo mismo, es decir, cada ángulo mide 60°.



$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\frac{1(180°)}{3} = 60^0$

En un cuadrado la suma de los ángulos interiores es 2(180°) = 360° (cuatro ángulos rectos) y cada ángulo mide 90 ° .



$$\frac{2(180^{\circ})}{4} = 90^{\circ}$$

Para el pentágono regular la suma de las medidas de sus ángulos es $3(180^0) = 540^0$ y cada ángulo mide:

$$\frac{3(180^{\circ})}{5} = 108^{\circ}$$

Por lo tanto, podemos deducir que en un hexágono regular cada ángulo mide:

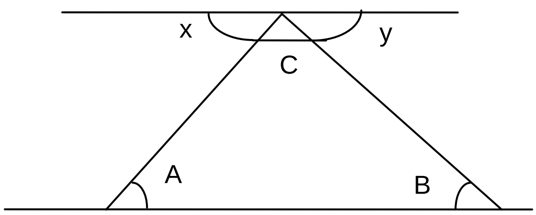
$$\frac{4(180^{\circ})}{6} = 120^{\circ}$$

En geometría es importante realizar otro tipo de deducciones llamadas **teoremas** los cuales nos permiten “garantizar” que una aseveración se cumple siempre, por ejemplo:

TEOREMA:

“La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180^0”

Sea la figura:



Hipótesis: $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ son ángulos interiores del triángulo ABC.

Tesis: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$.

Demostración:

(1) $\angle x + \angle y + \angle C = 180^0$ por ser suplementarios

$\angle x = \angle A$ por ser alternos internos

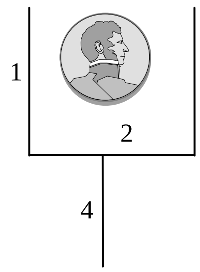
$\angle y = \angle B$ por ser alternos internos

sustituyendo en (1):

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ queda entonces demostrado (q.e.d.).

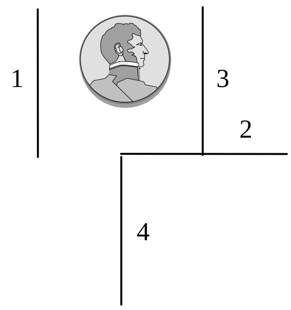
APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

La figura siguiente muestra el diseño de cuatro segmentos que representan un espejo con una moneda en él.

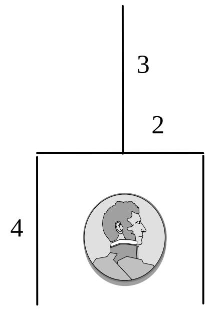


Se desea formar otro espejo del mismo tamaño moviendo sólo dos segmentos, dejando la moneda (que no debe moverse) fuera del espejo.

Obtenemos otro espejo del mismo tamaño si movemos el segmento 2 hacia la derecha.



Ahora movemos el segmento 1 abajo a la derecha.



Se tienen doce números unos, dispuestos en cuadro como lo muestra la figura.

1	11	1	= 4
11		11	
1	11	1	= 4
= 4		= 4	

En cada lado la suma es 4.

Cambia de lugar cuatro unos y colócalos de modo que la suma en cada lado sea 5.

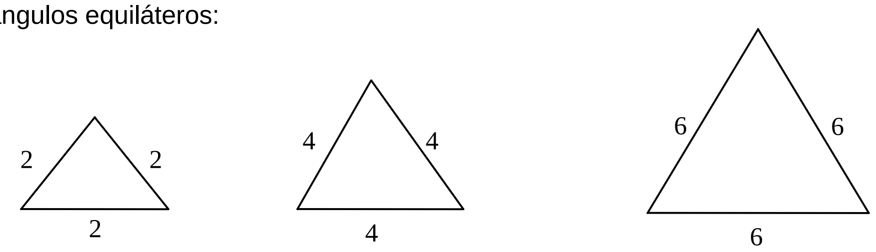
			= 5
			= 5
= 5		= 5	

En cada lado la suma es 5.

EJERCICIOS

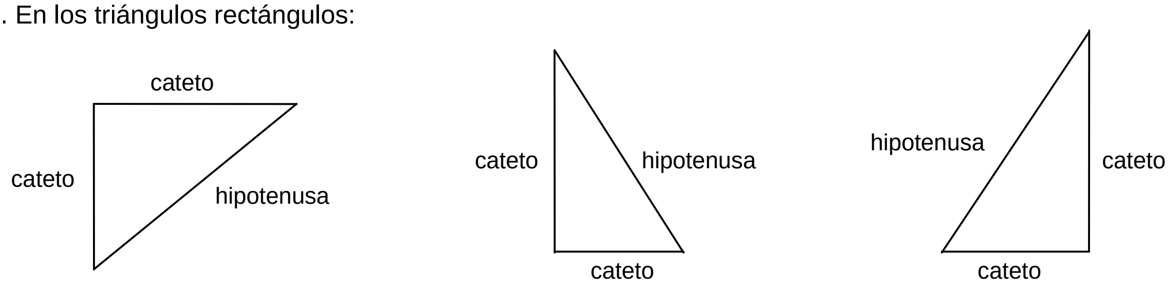
INSTRUCCIONES: Coloca sobre la(s) línea(s) la(s) palabra(s) que complete(n) correctamente cada enunciado.

1. En los triángulos equiláteros:



Los ángulos son ___________________________ y cada ángulo mide ___________________ grados.

2. En los triángulos rectángulos:



El lado mayor es ______________________ y el lado opuesto al ángulo recto se llama _________________

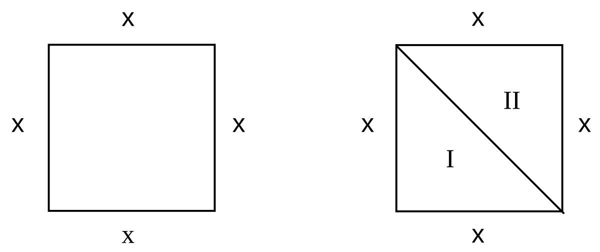
3. Si una figura geométrica tiene cuatro ángulos rectos es un __________________ y las diagonales son

______________________.

4. Observa la relación que hay entre el número de lados de un polígono convexo y el número de diagonales que se pueden trazar en él desde un vértice y completa la secuencia.

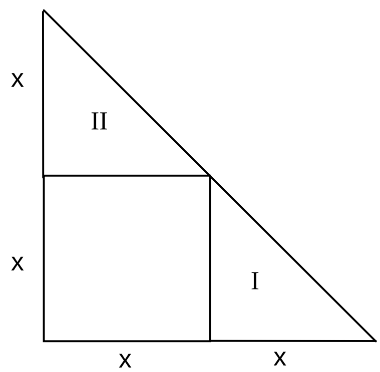
Número de lados	Diagonales
3	*0*
4	*1*
5	*2*
6	*3*
7	*4*
10	_____
15	_____
n	_____

5. Los cuadrados son congruentes:



Si sumas las áreas de los cuadrados el resultado es: $x^2 + x^2 = 2x^2$

El segundo cuadrado se puede descomponer en dos triángulos para formar un triángulo rectángulo con el primer cuadrado como se muestra en la figura.



Entonces el área del triángulo aplicando la fórmula **A = bh/2** es _____________________.

6. En una fila de cinco rectángulos se colocan dos fichas rojas (R) y dos fichas verdes (V) de la siguiente manera:

R	R		V	V

Las fichas rojas pueden moverse un lugar hacia la derecha (D) siempre que haya un hueco. También puede saltar sobre un ficha del otro color si a continuación hay un hueco. Las fichas verdes pueden moverse de la misma manera pero hacia la izquierda (I).

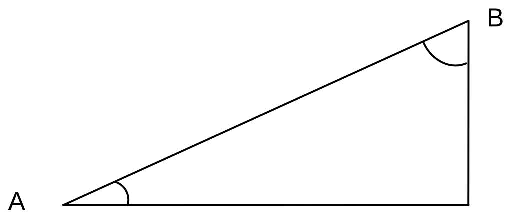
Completa el esquema para acomodar las fichas rojas donde están las verdes y las verdes donde están las rojas.

ESQUEMA

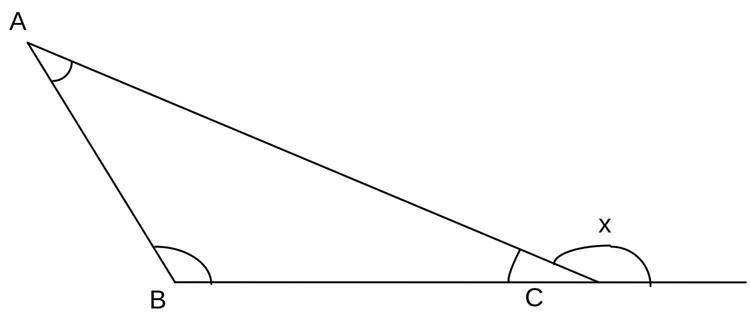
R	R	____	V	V
R	____	R	V	V
R	V	R	____	V

INSTRUCCIONES: Realiza las demostraciones de los siguientes teoremas, incluyendo hipótesis, tesis y demostración.

7. Teorema: “La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 90^0 ”.



8. Teorema: “Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él“.



9. Teorema: “En dos rectas oblicuas los ángulos opuestos por el vértice son congruentes”.

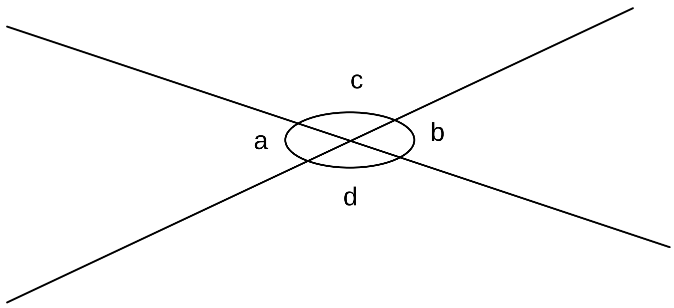


TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta	Sugerencias
1 2 3	congruentes, 60° hipotenusa, hipotenusa rectángulo o cuadrado, congruentes	Repasa clasificación de triángulos
4 5	7, 12, n - 3 A = $\frac{2x(2x)}{2}$ = $\frac{4x^2}{2}$ = $2x^2$	Emplea la fórmula para calcular el área de un triángulo.
6	R R ____ V V R ____ R V V R V R ____ V R V R V ____ R V ____ V R ____ V R V R V ____ R V R V V R ____ R V V ____ R R	Emplea dos tarjetas de cartón rojas y dos de color verde realizando los movimientos que se señalan en el esquema para que visualices cómo llevar a cabo la nueva ubicación de las fichas.
7	*Hipótesis:* $\angle$A y $\angle$B; son los ángulos agudos *Tesis:* $\angle$A + $\angle$B = 90 ° *Demostración:* $\angle$A + $\angle$B + 90° = 180° aplicando el teorema de suma de ángulos interiores. $\angle$A + $\angle$B = 180° - 90° $\angle$A + $\angle$B = 90° q.e.d.	Revisa el libro Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría, de Aurelio Baldor, páginas 58, 59, 26 y 27.

Número de pregunta	Respuesta correcta	Sugerencias
8	*Hipótesis:* $\angle x$ es ángulo exterior $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos no adyacentes a $\angle x$ *Tesis:* $\angle x = \angle A + \angle B$ *Demostración:* $\angle x + \angle C = 180°$; por ser suplementarios. $\angle x = 180° - \angle C$ ....(1) *También:* $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$; por teorema de suma de ángulos interiores. $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$.........(2) comparando las ecuaciones (1) y (2) $\angle x = 180° - \angle C = \angle A + \angle B$ *por lo tanto:* $\angle x = \angle A + \angle B$	
9	*Hipótesis:* $\angle a$ y $\angle b$; son opuestos por el vértice *Tesis:* $\angle a = \angle b$ *Demostración:* $\angle a + \angle c = 180°$ por ser suplementarios, $\angle a = 180° - \angle c$ $\angle c + \angle b = 180°$ por ser suplementarios, $\angle b = 180\ ° - \angle C$ por lo tanto: $\angle a = 180° - \angle C = \angle b$ $\angle a = \angle b$ q.e.d.	

AUTOEVALUACIÓN

Cuentas con una hora treinta minutos para resolver todos los ejercicios.

INSTRUCCIONES: Analiza el siguiente planteamiento y contesta los reactivos 1 a 3.

Se tiene vino envasado en 21 vasijas iguales, de las cuales se hallan 7 llenas, 7 a la mitad y 7 vacías. Se desea repartir las 21 vasijas entre tres personas de modo que cada una reciba el mismo número de vasijas y la misma cantidad de vino.

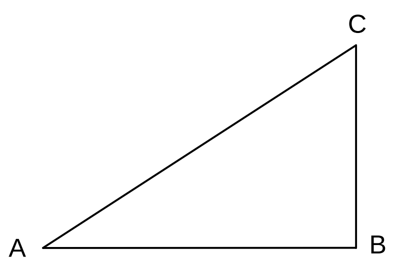
1. La primera persona recibe ____.

2. La segunda persona recibe ____.

3. La tercera persona recibe ____.

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes planteamientos y escribe sobre la(s) línea(s) la(s) palabra(s) que complete(n) correctamente cada enunciado.

4. En el triángulo rectángulo ABC el ángulo B = 90 °



La suma de $\angle A + \angle C$ = ______________ grados y los ángulos son __________________.

5. Si dos ángulos interiores de un polígono suman 90 °, el polígono es un ________________.

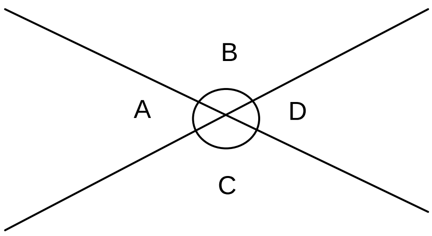
6. En todo triángulo, un lado es_________________que la suma de los otros dos y ________________que la diferencia.

7. Observa la relación que existe entre el número de lados de un polígono regular y la suma de los ángulos interiores, completa la secuencia y deduce la ecuación para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono regular de "**n**" lados.

Número de lados	Suma de ángulos interiores
3	180 °
4	360 °
5	540 °
6	720 °
7	900 °
11	________
15	________
n	________

INSTRUCCIONES: Analiza la siguiente información y contesta los reactivos 8 a10.

Considera las rectas:

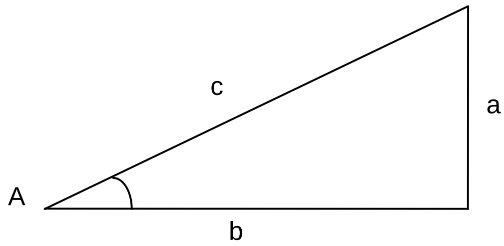


8. Al sumar $\angle A + \angle B =$ ______ grados.

9. Al sumar $\angle B + \angle D =$ ______ grados.

10. Puedes deducir que los ángulos opuestos por el vértice son: ________________.

11. Realiza la demostración del teorema: “La tangente de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, es igual a la relación entre el seno y el coseno”, incluye hipótesis, tesis y demostración.



$$Tan\ A = \frac{SenA}{CosA}$$

CLAVE DE RESPUESTAS

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	Primer persona: 3 llenas, 1 a la mitad y 3 vacías
2	Segunda persona: 2 llenas, 3 a la mitad y 2 vacías
3	Tercer persona: 2 llenas, 3 a la mitad y 2 vacías
4	90°, complementarios
5	triángulo
6	menor, mayor
7	1620°, 2340°, 180° (n - 2)
8	180°
9	180°
10	iguales o congruentes
11	*Hipótesis:* Sen A = a/c.....................(1) Cos A = b/c.....................(2) Tan A = a/b.....................(3) *Tesis:* Tan A = $\frac{Sen\ A}{Cos\ A}$ *Demostración:* Tan A = $\frac{a}{b}$ definición de tangente Tan A = $\frac{a\ \ c}{b\ \ c}$ neutro multiplicativo Tan A = $\frac{a/c}{b/c}$ por proporción *Sustituyendo:* (1) y (2) Tan A = $\frac{Sen\ A}{Cos\ A}$ q.e.d.

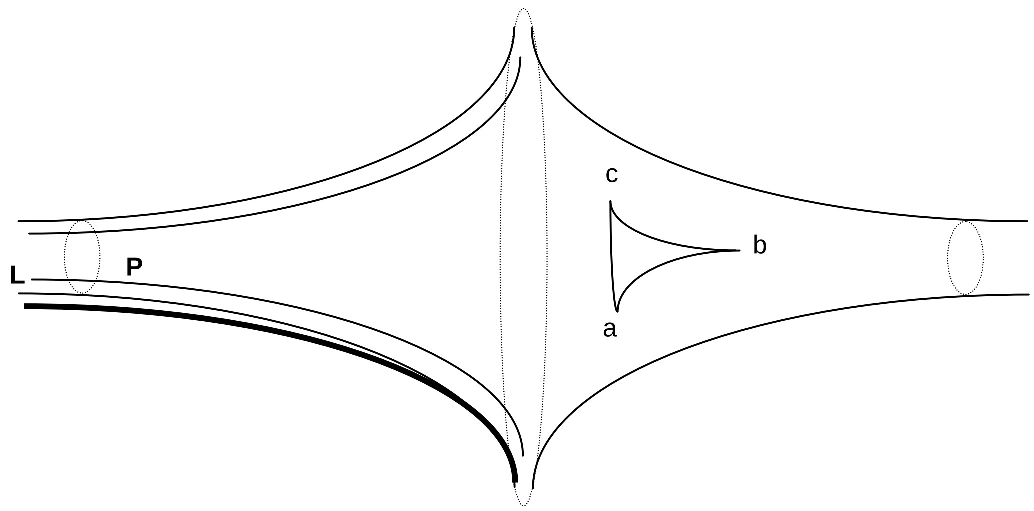
Unidad IV

ELEMENTOS DE OTRAS GEOMETRÍAS

4.1 Geometrías diferentes: sus fundamentos.

Aprendizajes
• Comparar las semejanzas y diferencias de figuras desde la perspectiva Euclidiana y no Euclidiana. • Deducir algunas consecuencias del quinto postulado de Euclides. • Comprender el proceso de iteración en la generación recursiva de figuras.

Para la **geometría euclidiana** el modelo básico es **el plano;** la **geometría de Lobatchevsky** tiene como modelo la superficie llamada **pseudoesfera.**

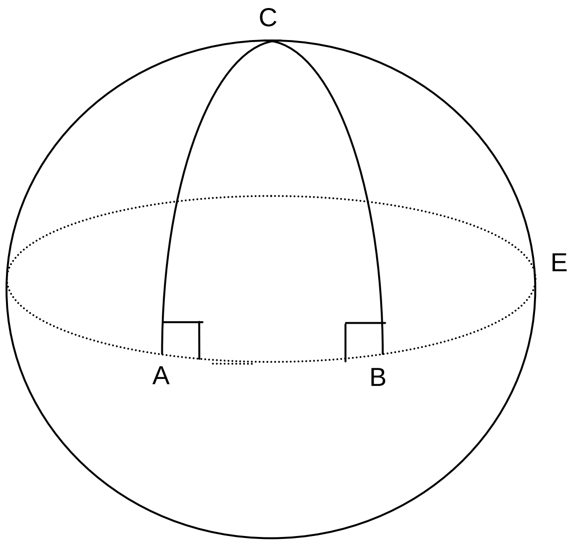


PSEUDOESFERA. Modelo para la geometría de Lobatchevsky

El comportamiento de líneas y figuras en la pseudoesfera es diferente al comportamiento de las mismas en el plano. Si analizas las "rectas" paralelas puedes observar que no son equidistantes en todos sus puntos; además, se puede trazar más de una recta paralela a la recta **L** y un punto **P** que no pertenezca a **L**.

En la *geometría euclidiana* existe el teorema "**la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°",** pero en la *geometría de Lobatchevsky* podemos observar que este principio no se cumple, ya que **la suma de los ángulos interiores en la pseudoesfera**, como vemos, **es menor que 180 °**.

Otro modelo diferente a la geometría euclidiana, es la geometría de Riemann, cuyo modelo se puede analizar en la superficie de una esfera.



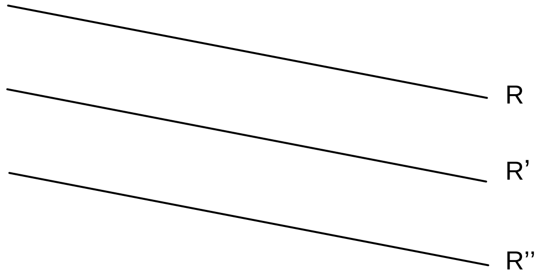
ESFERA. Modelo para la geometría de Riemann

Las "rectas" trazadas alrededor de la esfera son circunferencias, todas ellas se interceptan entre sí; el triángulo ABC contiene dos ángulos rectos, por lo que la suma de sus ángulos interiores es mayor a 180 ° . Entre mayor sea el área del triángulo mayor será la suma de sus ángulos, por lo que no puede haber triángulos semejantes.

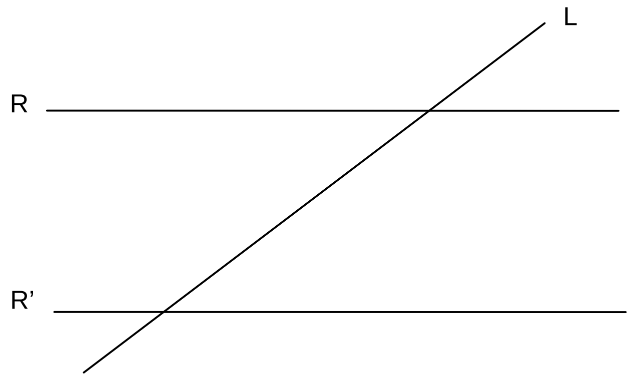
Las geometrías de Lobatchevsky, Riemann y otros, fueron deducidas gracias al quinto postulado de Euclides "**por un punto exterior a una recta, pasa una y sólo una recta paralela a dicha recta"**.

Algunas consecuencias de este quinto postulado son:

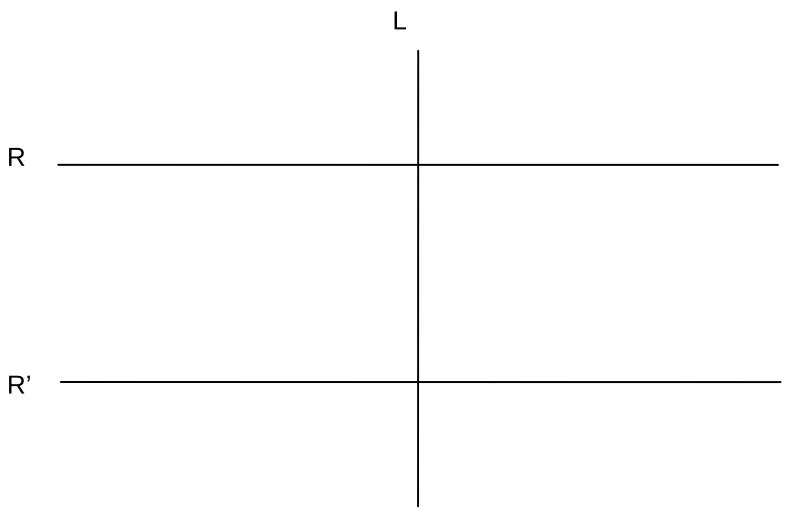
- ***Si dos rectas son paralelas a una tercera, son paralelas entre sí.***



- ***Si dos rectas son paralelas, toda recta que corte a una de ellas, también cortará la otra recta.***



- ***Si dos rectas son paralelas, toda perpendicular a una de ellas, también es perpendicular a la otra.***



Otro tipo de geometría que es muy importante conocer es la **geometría de la naturaleza.**

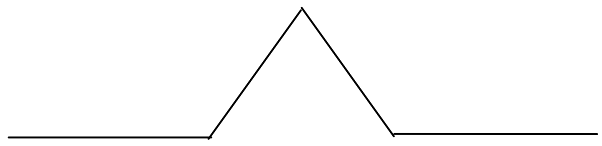
Si analizas cuidadosamente las ramas de un árbol puedes observar que de una rama salen muchas "ramitas" y en cada una de ellas se repite el mismo esquema. La ampliación de una parte del original es muy similar al original mismo.

A cualquier objeto que represente la misma estructura al cambiar indefinidamente su escala de observación se le llama ***fractal.***

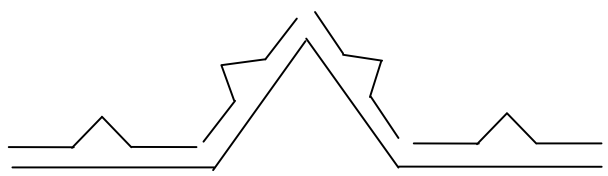
APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

A continuación te mostraremos *el patrón geométrico* mediante el cual se construye un fractal.

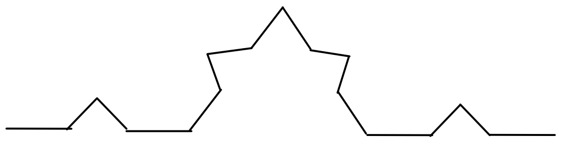
Se trata básicamente de una *figura generadora.*



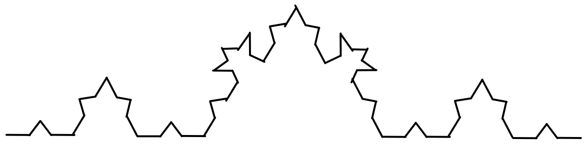
Si en cada segmento de la figura generadora repetimos el mismo patrón geométrico, como se muestra a continuación:



nos queda la nueva figura:

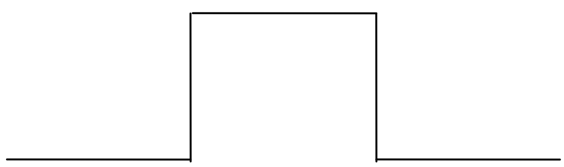


y si volvemos a aplicar el mismo patrón geométrico a cada segmento de la figura, obtenemos:



y así indefinidamente.

Utiliza la figura generadora que se te muestra y repite ***dos veces*** la misma en cada segmento.



EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y escribe dentro del paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. (   ) La suma de los ángulos interiores de un triángulo en la pseudoesfera es:

    a) menor que 180 °.
    b) igual a 180 °.
    c) mayor que 180 ° y menor que 360 °.
    d) igual a 360 °.

2. (   ) Dada una recta L y un punto P que no pertenece a L en una pseudoesfera, el número de rectas paralelas que se pueden trazar por P son:

    a) una.
    b) dos.
    c) cuatro.
    d) infinito.

3. (   ) En la esfera el triángulo ABC contiene dos ángulos rectos por lo que la suma de los ángulos interiores de dicho triángulo mide

    a) menos de 180 °.
    b) 180 °.
    c) más de 180 y menos de 360 °.
    d) 360 °.

INSTRUCCIONES: Coloca sobre la(s) línea(s) la(s) palabra(s) que completa(n) correctamente cada enunciado.

4. Dos rectas paralelas a una tercera son ______________________entre sí.

5. Si una recta corta a otra, corta también a las __________________a ésta.

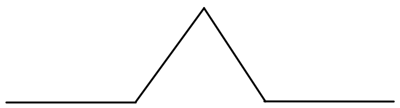
6. Si una recta es perpendicular a otra, es ______________________a toda paralela a esta otra.

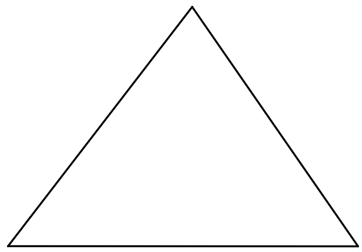
7. Toda recta es ______________________a sí misma.

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se solicita.

8. Repetir la figura generadora en cada lado del triángulo dos veces.

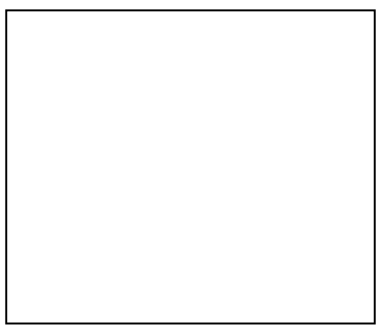
Figura generadora.



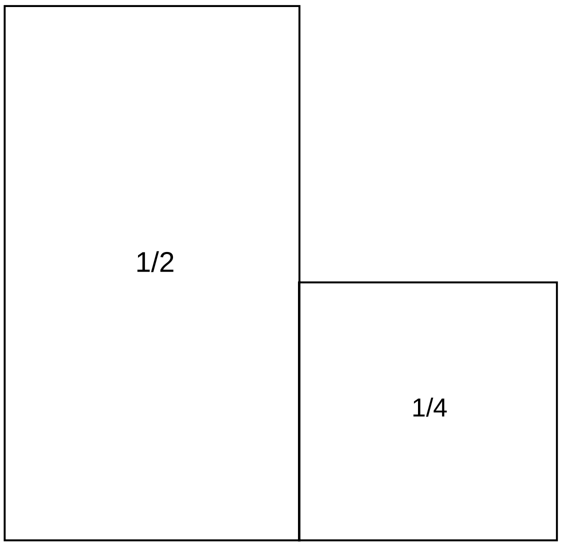


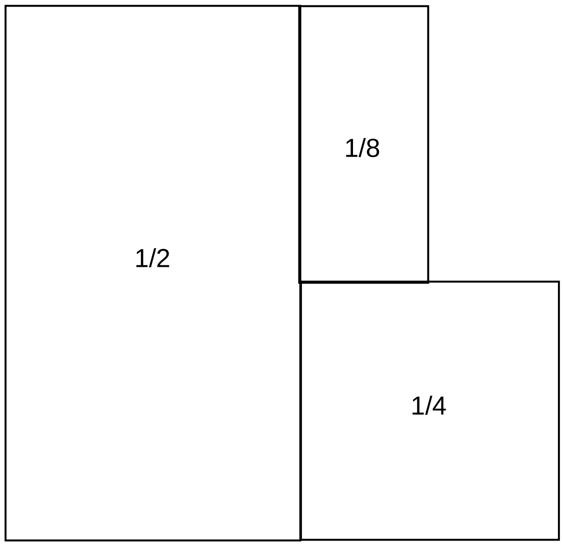
9. Repetir la figura generadora en cada lado del cuadrado dos veces.

Figura generadora.



10. Analiza cuidadosamente la serie de figuras que se presentan y contesta lo que se pide.





Si se continuan sumando mitades de mitades de manera indefinida la suma total es _________.

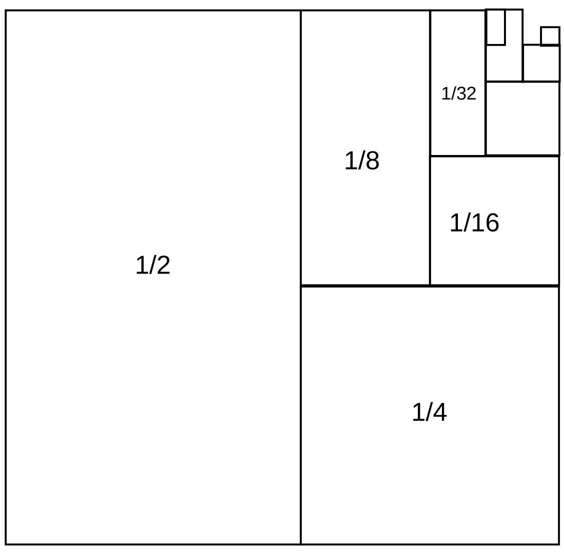
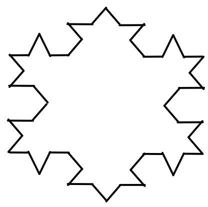
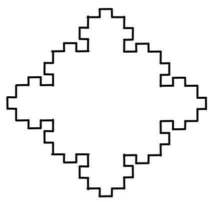


TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta	Sugerencias
1 2 3	a d c	Analiza la pseudoesfera de Lobatchevsky y la esfera de Riemann mostradas anteriormente.
4 5 6 7	paralelas paralelas perpendicular paralela	Repasa en la guía las consecuencias mencionadas del quinto postulado de Euclides.
8 9 10	  uno	Revisa la forma en que se construyó el fractal en aplicación del conocimiento.

UNIDAD 4

AUTOEVALUACIÓN

Cuentas con una hora para resolver todos los ejercicios.

INSTRUCCIONES: Escribe dentro del paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

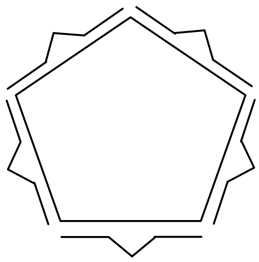
1. (   ) En la esfera, entre mayor es el área de un triángulo su suma angular es:

   a) menor.
   b) igual.
   c) 180 °.
   d) mayor.

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se solicita.

2. Si en un cuadrilátero tres ángulos son rectos, entonces el cuarto ángulo es______________.

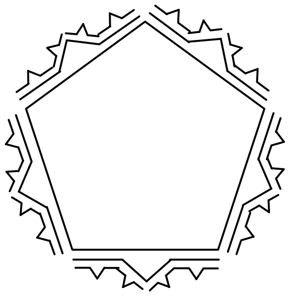
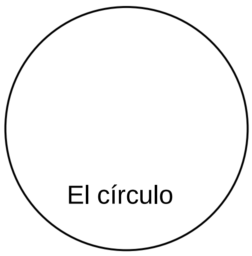
3. Analiza la siguiente imagen, en la cual a cada lado del pentágono se le inserta una *figura generadora* como la que se observa.



I. Dibuja la figura que se forma si se inserta nuevamente la *figura generadora* en cada lado que se ha formado.

II. ¿Qué figura geométrica se formará si insertas *n veces* la *figura generadora* en cada nuevo lado que se va formando del pentágono?

CLAVE DE RESPUESTAS

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	d
2	recto
3 I) II)	 

BIBLIOGRAFÍA

1. BALDOR, AURELIO. *Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría*. Cultural Mexicana, México, 1994. 387 pp.

2. HEMMERLING M. EDWIN. *Geometría Elemental*. Limusa, México, 1990. 350 pp.

3. GUZMÁN HERRERA, ABELARDO. *Geometría y Trigonometría*. Publicaciones Cultural, México, 1991. 276 pp.

4. CLEMENS, STANLEY/ G. O'DAFFER, PHARES/ J. COONEY, THOMAS. *Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas*. Addison Wesley Longman, México, 1998. 532 pp.

5. SALAZAR VÁZQUEZ, PEDRO/ SÁNCHEZ GUTIÉRREZ, SERGIO: *Matemáticas III.* Nueva Imagen, México, 1999. 262 pp. *Colección nuevo rumbo.*

SUGERENCIAS PARA PRESENTAR EXÁMENES DE RECUPERACIÓN O ACREDITACIÓN ESPECIAL

Para evitar cualquier contratiempo al presentar el examen de recuperación o acreditación especial debes considerar las siguientes recomendaciones:

Organización:

- Preséntate al menos con 10 minutos de anticipación al salón indicado. Debes presentarle al profesor aplicador, esta Guía resuelta.
- Lleva el comprobante de inscripción al examen y tu credencial actualizada.
- Lleva dos lápices del No. 2 o 2 ½.
- No olvides una goma que no manche.

Durante el examen:

- Lee con atención tanto las instrucciones como las preguntas y si tienes alguna duda consúltala con el aplicador.
- Contesta primero las preguntas que te parezcan “fáciles” y después concentra toda tu atención en las “difíciles”.
- Si te solicitan explicar o desarrollar algún tema, identifica las ideas principales que quieras exponer y escríbelas de la manera más concreta y clara que puedas, evita el planteamiento de ideas innecesarias.
- Escribe tus respuestas con letra clara, legible y sin faltas de ortografía.
- Al terminar de contestar el examen, revísalo nuevamente para asegurarte que todas las preguntas estén contestadas.
- Centra tu atención en el examen, no trates de copiar, recuerda que el compañero de junto puede estar equivocado.

La Guía para presentar exámenes de
Recuperación o Acreditación especial de
Matemáticas III
se terminó de reimprimir en el mes de octubre de 2006
en los talleres de la Impresora y Encuadernadora Progreso, S.A. de C.V.
Calz. San Lorenzo Tezonco núm. 244, Col. Paraje San Juan
Delegación Iztapalapa, C.P. 09830

El tiraje fue de 1,100 ejemplares
más sobrantes para reposición