COLEGIO DE
BACHILLERES
"Un proceso pertinente de
formación para la vida"

COLEGIO DE BACHILLERES

Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial

(Apoya a Plan 92)

MATEMÁTICAS II

Guía para presentar exámenes de
Recuperación o Acreditación Especial

Matemáticas II
(Versión preliminar)

Esta guía fue elaborada por la **Secretaría Académica,** a través de la **Dirección de Planeación Académica**.

Colaboradores

Profra. Esther Barrera Padilla
Profra. Guadalupe Mercedes Rodríguez Segundo
Profr. Jaime Moreno Ayala

Colegio de Bachilleres, México
www.cbachilleres.edu.mx
Rancho Vista Hermosa No. 105
Ex-Hacienda Coapa,
04920, México, D.F.

La presente obra fue editada en el procesador de palabras Word 97.

Word 97, es marca registrada de Microsoft Corp.

Este material se utiliza en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Colegio de Bachilleres, institución pública de educación media superior del Sistema Educativo Nacional

ENERO 2001

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

La evaluación de recuperación y la de acreditación especial son oportunidades extraordinarias que debes aprovechar para aprobar las asignaturas que por diversas razones reprobaste en el curso normal; pero ¡cuidado!, presentarse a un examen sin la preparación suficiente es ir hacia un fracaso seguro, es una pérdida de tiempo y un acto irresponsable que debes evitar.

¿Cómo aumentar tu probabilidad de éxito en el examen mediante la utilización de esta guía? La respuesta es simple, sigue las siguientes reglas:

- Convéncete de que tienes capacidad de sobra para acreditar la asignatura, como prueba recuerda que fuiste capaz de ingresar al Colegio mediante un examen de selección

- Sigue al *pie de la letra* todas las instrucciones de la guía.

- Deja de hacer otras cosas para dedicarte al estudio de este material, *durante 15 días al menos, tres horas diarias continuas.*

- Contesta toda la guía, es un requisito que antes del examen se la presentes resuelta y en limpio al profesor aplicador.

PRÓLOGO

En el marco del Programa de Desarrollo Institucional 2001-2006 el **alumno** tiene especial relevancia, por lo que el Colegio de Bachilleres Metropolitano se ha abocado a la elaboración de diversos materiales didácticos que apoyen al estudiante en los diferentes momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Entre los materiales elaborados se encuentran las guías de estudio, las cuales tienen como propósito apoyar a los estudiantes que deben presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial, con el objetivo de favorecer el éxito en los mismos.

En este contexto, la Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial de **Matemáticas II** se ha elaborado pensando en los estudiantes que por diversas causas reprobaron la asignatura en el curso normal y deben acreditarla a través de exámenes en periodos extraordinarios.

Esta guía se caracteriza por abordar, de manera sintética, los principales temas señalados en el programa de estudios, así como la ejercitación de los procedimientos numéricos y algebraicos, ahora con el estudio de la función lineal, la función cuadrática y las funciones algebraicas, además de proporcionar elementos de autoevaluación y sugerencias, en caso de que se necesite mayor información para comprender dichos temas.

En la primera unidad de la guía, denominada **FUNCIÓN LINEAL Y ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS**, se abordan los aprendizajes relacionados con el álgebra de funciones, a través del estudio de la función lineal y la proporcionalidad directa, su representación gráfica, su relación con la ecuación de primer grado, además, se incluyen ejercicios sobre la solución de problemas aplicando los modelos algebraicos de estas funciones.

En la segunda unidad, **FUNCIONES POLINOMIALES Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA**, se desarrollan y ejercitan los elementos algebraicos, gráficos y geométricos de estas funciones, en particular de la ecuación cuadrática, asimismo se abordan funciones polinomiales de grado 3 y 4 y se incluyen problemas en los cuales se ejercita la aplicación de sus métodos de solución.

En la tercera unidad, **ANÁLISIS DE FUNCIONES: EJEMPLOS INTERESANTES**, se aborda el estudio de los elementos básicos de la función y su representación gráfica, tanto de funciones algebraicas como trascendentes, asimismo se ejercita la deducción del modelo matemático a partir de la gráfica, también se identifica y se representa gráficamente las funciones continuas y discretas, finalmente se ejercita la aplicación de los modelos y procedimientos algebraicos de funciones en la solución de problemas.

Por último, se proporciona una bibliografía básica para consultar en fuentes originales los temas desarrollados en la guía.

Unidad 1

Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas

1.1 FUNCIÓN LINEAL Y ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

APRENDIZAJES

- Relacionar la proporcionalidad directa con la función lineal.
- Analizar los elementos algebraicos de la función lineal.
- Representar gráficamente una función lineal.
- Resolver problemas donde se aplique la función lineal.
- Relacionar la representación simbólica con la gráfica de la función lineal.

En la vida cotidiana existe gran variedad de situaciones que se pueden resolver mediante ecuaciones de primer grado con una o dos incógnitas, como a continuación se muestra.

Ejemplo

Juan le dice a Pedro: ***"Si cuadruplicas tus ahorros y le sumas un bono de $8.00 podrás reunir $120.00."***

¿Cuánto dinero tiene Pedro hasta el día de hoy?

Para contestar esta pregunta, primero se debe convertir el enunciado en una ecuación algebraica:

Los ahorros de Pedro hoy	Lo que tendría después
x	$4x + 8 = 120$

En este caso la letra **x** representa una incógnita o cantidad desconocida; en general, el tipo de expresión $4x + 8 = 120$ se conoce como **ecuación de primer grado con una incógnita.**

Para continuar la resolución del problema es necesario resolver la ecuación mediante el procedimiento estándar.

Paso I $4x + 8 = 120$ (se suma el simétrico de 8 en ambos lados de la igualdad)

$$4x + 8 + (-8) = 120 + (-8)$$

$$4x + 0 = 112$$

Paso II. $4x = 112$ (se multiplica el recíproco del coeficiente 4 en ambos lados de la igualdad)

$$(1/4)\ 4x = 112\ (1/4)$$

$$x = 28$$

Por lo tanto, la cantidad ahorrada hasta hoy por Pedro es: $28.00

Si se cuadruplica (4x) se obtiene: 4(28) = 112
Si se agrega el bono de 8 se obtiene: 112 + 8 = 120

Se observa que la ecuación de primer grado con una incógnita es una herramienta adecuada para resolver este tipo de problemas; sin embargo, si quisiéramos resolver con una sola ecuación todos los problemas de un mismo tipo, tendría mayor utilidad.

Ejemplo

Al modificar el enunciado del problema antes descrito obtenemos:

Juan le dice a Pedro: ***"Si cuadruplicas tus ahorros y le sumas un bono de $8.00 podrás reunir una cantidad mucho mayor."***

Los ahorros de Pedro hoy	Lo que tendría después
x	4**x** + 8 = **y**

Como la cantidad que tendría después no está determinada se utiliza la literal **y**. Veamos cómo funciona esta nueva ecuación con dos incógnitas.

Primero suponemos cualquier cantidad ahorrada por Pedro, pues mientras él no lo manifieste es imposible decir cuánto tendría después, si Pedro nos preguntara cuánto tendría si ahorrara 30, 65 o 142 pesos.

Para responder se construye una tabla donde **x** representa el ahorro de Pedro y la cantidad que obtendría después es **y**.

Los ahorros de Pedro hoy	Lo que tendría después
x	4**x** + 8 = y
30	4(30) + 8 = 120 + 8 = 128
65	4(65) + 8 = 260 + 8 = 268
142	4(142) + 8 = 568 + 8 = 576

En este caso la ecuación se utiliza como una "fórmula" o regla donde cada valor de **y** depende de la cantidad ahorrada **x**. Esta dependencia se conoce como FUNCIÓN LINEAL; es decir, es una relación en la cual a cada elemento del dominio le corresponde una y sólo una imagen.

Al hablar de función es necesario cambiar el significado de las literales, ya que en este caso se convierten en "variables"; mientras que a **x** se le llama *variable independiente* a **y** se le conoce como *variable dependiente*. Asimismo, a la ecuación se le denomina *regla de correspondencia*.

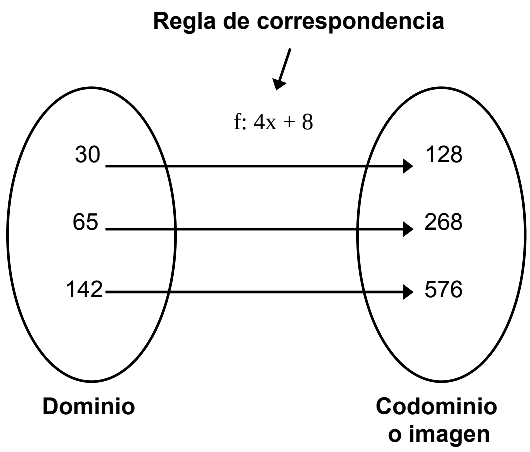
En general, una función tiene tres componentes:

a) El conjunto de valores de la variable independiente **x** al que llamaremos **dominio de la función.**

b) El conjunto de valores de la variable dependiente **y** al que denominaremos **codominio de la función o imagen.**

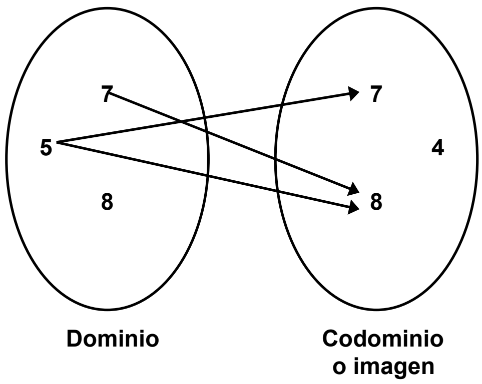
c) A la fórmula o ecuación para obtener los valores del codominio la denominaremos **regla de correspondencia.**

En el ejemplo antes descrito podemos identificar estos componentes mediante un diagrama sagital.



En el diagrama se ve que a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo uno del codominio, característica esencial de toda función.

Analiza el siguiente diagrama para saber cuándo no se tiene una función.



No es función porque un elemento del dominio (8) no tiene imagen y un elemento del dominio (5) tiene dos imágenes.

Analiza el siguiente ejemplo: en una tienda de autoservicio el frasco de café cuesta 32.00 pesos.

Si adquieres 1 frasco de café, pagarás por él $32.00

Si adquieres 2 frascos de café pagarás $64.00

Si adquieres 3 frascos de café pagarás $96.00

Si adquieres 4 frascos de café pagarás $128.00

Si adquieres 5 frascos de café pagarás $160.00

Si adquieres 7 frascos de café pagarás $224.00

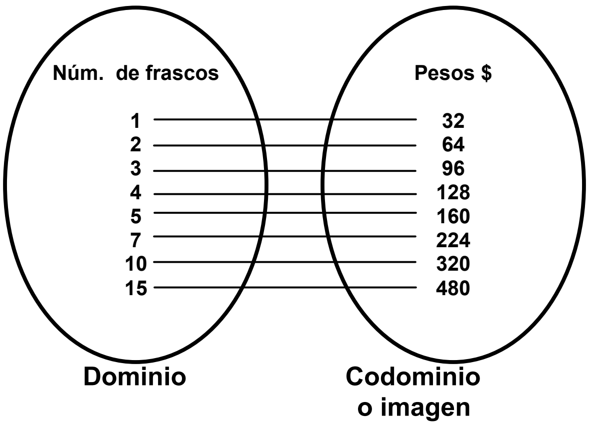
Si adquieres 10 frascos de café pagarás $320.00

Si adquieres 15 frascos de café pagarás $480.00

La cantidad que se paga está en función de la cantidad de frascos de café que adquieras, lo que se puede representar en una tabla:

Núm. de frascos	1	2	3	4	5	7	10	15
Pesos $	32	64	96	128	160	224	320	480

o mediante un diagrama sagital:



También se observa una relación del monto en pesos y el número de frascos de café que se compran.

En el siguiente problema se identifica el dominio y la regla de correspondencia. Además, obtenemos el codominio.

El perímetro de una circunferencia está dado por la ecuación P = πD

Donde: *P = perímetro de la circunferencia*

π = constante con valor de 3.1416

D = diámetro de la circunferencia

Los elementos del dominio son números reales positivos que representan el valor que puede tomar cualquier diámetro, por ejemplo: *diámetro = {0.5, 1, 1.6, 2, 2.3, 2.8, 3}* si se considera que no existen diámetros negativos.

La regla de correspondencia se representa mediante la ecuación P = πD. En ésta el perímetro se obtiene a través del producto de la constante π por cada uno de los elementos del dominio.

Al realizar este producto se obtiene el codominio de la siguiente manera:

DOMINIO **Diámetro**	**REGLA DE CORRESPONDENCIA** **πD**	**CODOMINIO O IMAGEN** **Perímetro**
0.5	3.1416(0.5)	1.5708
1.0	3.1416(1)	3.1416
1.6	3.1416(1.6)	5.0265
2.0	3.1416(2)	6.2832
2.3	3.1416(2.3)	7.2256
2.8	3.1416(2.8)	8.7964
3.0	3.1416(3)	9.4248

La anterior relación sí es *función* porque a cada elemento del dominio le corresponde un elemento y sólo un elemento del codominio (o imagen).

En general, cuando el cociente que resulta de dividir el valor de la variable dependiente (codominio) entre el valor de la variable independiente nos conduce a una constante, se dice que la ***relación es proporcional***.

En forma estándar, una relación proporcional se representa como:

$$\frac{y}{x} = K$$

o bien, despejando la variable dependiente *y* tenemos:

$$y = Kx$$

P R O B L E M A S

En el siguiente ejemplo podrás observar cómo obtener la regla de correspondencia.

Un capturista recibe 36.00 pesos diarios y por cada página capturada tiene una comisión de 3.00 pesos.

a) *Revisa los elementos para establecer la regla de correspondencia.*

b) *Si el lunes entregó 15 páginas, el martes 18, el miércoles 20, el jueves 22 y el viernes 23, ¿cuánto ganó por día?*

c) *Con estos datos se podrá elaborar una gráfica para relacionar el número de páginas con el sueldo por día.*

Solución

a) La regla de correspondencia está dada por:

Sueldo fijo por día (F) = $ 36.00
Comisión por cada página (C) = $ 3.00
Número de páginas por día = p
Sueldo total por día = T

Sueldo total por día = sueldo fijo por día + (comisión por página)(número de páginas).

La regla de correspondencia es:

T = F + Cp

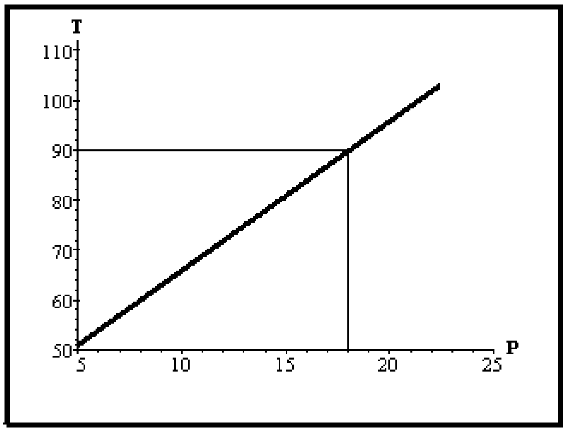
Pero no olvidemos que *F* y *C* son constantes, y al sustituirlas queda:

T = 36 + 3p

b) La siguiente tabla muestra el sueldo total por día en función del número de páginas capturadas.

DOMINIO **Número de páginas por día p**	**REGLA DE CORRESPONDENCIA** **36 + 3p**	**CODOMINIO** **Sueldo total por día T**
15	36 + 3 (15)	81
18	36 + 3 (18)	90
20	36 + 3 (20)	96
22	36 + 3 (22)	102
23	36 + 3 (23)	105

c) Gráfica de la función.



Esta gráfica muestra la relación del número de páginas capturadas (p), con el sueldo por día (T). Observa que a cada pareja de números le corresponde un punto definido. Esta relación de puntos en un plano y parejas de números se llama correspondencia uno a uno.

Resolvamos el siguiente problema:

Una arrendadora de autos cobra 210.00 pesos por día, más 8.00 pesos por cada kilómetro recorrido en la renta de coches compactos.

a) ¿Cuál es la regla de correspondencia de la función?

b) Si el arrendatario de un auto recorre el lunes 65 kilómetros, el martes 78, el miércoles 80, el jueves 92 y el viernes 103, ¿cuánto pagará por día?

c) Con estos datos se construye una gráfica para relacionar el número de kilómetros recorridos con el pago por día.

Solución

a) Tarifa base por día (B) = $ 210.00
Costo por kilómetro (C) = $ 8.00
Kilómetros recorridos por día = x
Costo por cobrar = y

Costo por cobrar = Tarifa base por día + (Costo por kilómetro) (Kilómetros recorridos por día)

La regla de correspondencia es la siguiente:

$$y = B + Cx$$

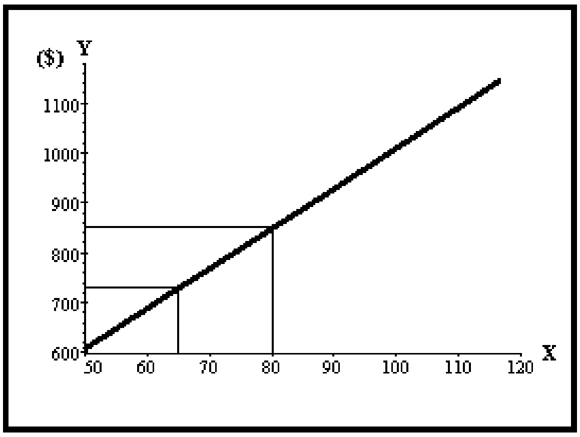
Como B y C son constantes, al sustituirlas queda:

$$\boxed{y = 210 + 8x}$$

b) Para obtener la regla de correspondencia se debe considerar que la variable independiente x es el número de kilómetros recorridos por día y el costo que cobrará la agencia es la variable dependiente y, tanto la tarifa base como la cuota por kilómetro son constantes; comprendido lo anterior podemos traducir el enunciado:

Número de kilómetros recorridos por día (x)	**Costo por cobrar (y) y = 210 + 8x**
Lunes 65	$y = 210 + 8(65) = 730$
Martes 78	$y = 210 + 8(78) = 834$
Miércoles 80	$y = 210 + 8(80) = 850$
Jueves 92	$y = 210 + 8(92) = 946$
Viernes 103	$y = 210 + 8(103) = 1,034$

c) Con los valores de la tabla se construye la gráfica.



Con base en los anteriores ejercicios se puede decir que la *función* se define como el conjunto de pares ordenados; por consiguiente, su gráfica se puede representar geométricamente en el plano cartesiano. Es importante recordar las partes que conforman la regla de correspondencia o modelo matemático para obtener la ecuación general de la función lineal. El modelo matemático o regla de correspondencia del problema de la renta de autos (pág. 9), es:

$$y = 210 + 8x \quad \text{o} \quad y = 8x + 210$$

En general, una función lineal tiene la forma y = m x + b, donde m y b son constantes (m = pendiente y b = ordenada al origen).

Forma particular		Forma general
$y = 8x + 210$	$\longrightarrow$	$y = m\,x + b$
$\uparrow$ valor de m $\uparrow$ valor de b		$m = 8;\quad b = 210$

P R O B L E M A A R E S O L V E R

La señora Juana invierte en el banco 3,500 pesos con un interés fijo mensual de 4%.

a) Escribe la regla de correspondencia que describe el problema.

b) ¿Cuánto dinero tendrá la señora Juana después de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 meses? Tabula los resultados.
c) Realiza la gráfica.

E J E R C I C I O S

INSTRUCCIONES: lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se solicita en cada caso.

1. *La pastelería El Cuernito estima en 35.00 pesos el costo de un pastel de chocolate y lo vende en 52.00 pesos.*

    a) Escribe la regla de correspondencia que describe la ganancia por la venta de los pasteles.

    b) ¿Cuánto puede ganar por la venta de 18 pasteles?

    c) *¿Cuántos pasteles se deben vender para tener una ganancia de 391.00 pesos?*

2. Por comprar 4.5 kilos de tortillas se pagaron 27.00 pesos en la tortillería El Madrugador.

   a) *Establece la regla de correspondencia entre el número de kilogramos de tortillas y el precio a pagar.*

   b) *Calcula el precio de un kilogramo de tortillas.*

   c) *Realiza la tabulación correspondiente en caso de comprar 1, 2, 3, 4 y 5 kilogramos de tortillas.*

d) *Realiza la gráfica con los datos anteriores.*

e) *¿Cuánto se debe pagar por comprar 15 kilogramos de tortillas?*

f) *¿Cuántos kilogramos se pueden comprar con 69.00 pesos?*

TABLA DE COMPROBACIÓN

NÚMERO DE PREGUNTA	RESPUESTA CORRECTA	FUNDAMENTACIÓN
1 a	G = (V - C) x	La regla de correspondencia está dada por: Costo total por pastel (C) = $ 35.00 Precio de venta (V) = $ 52.00 Número de pasteles vendidos = x Ganancia por la venta = G Ganancia por la venta de pasteles = (Precio de venta □ Costo total por pastel) por (Número de pasteles vendidos) La regla de correspondencia o modelo matemático es: G = (V □□C) x Pero no olvides que V y C son constantes, que al sustituirlas queda: G = (52 – 35) x G = 17x
b	$ 306.00	Para conocer la ganancia al vender 18 pasteles, se aplica la regla de correspondencia obtenida y se sustituyen los datos conocidos. Se sabe que el número de pasteles vendidos son 18, por lo tanto, x = 18. Sustituyendo el valor de x en el modelo matemático obtenido: G = 17x G = (17) (18) = 306 Por lo tanto, la ganancia obtenida por la venta de 18 pasteles será de $ 306.00
c	23 pasteles	Para obtener una ganancia de $ 391.00, se sustituye en el modelo obtenido G = 391 y se despeja la cantidad de pasteles vendidos x G = 17x G / 17 = x 391 / 17 = 23 23 = x

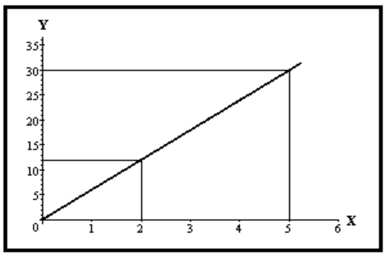
<table>
<tr><th>NÚMERO DE RESPUESTA</th><th>RESPUESTA CORRECTA</th><th>FUNDAMENTACIÓN</th></tr>
<tr><td>2

a</td><td>Regla de correspondencia
x = P / C</td><td>La regla de correspondencia está dada por:
Costo por kilogramo de tortilla = x
Precio pagado (P) = $ 27.00
Cantidad en kilogramos de tortillas compradas (C) = 4.5

Costo por kilogramo de tortilla = Precio pagado / Cantidad en kilogramos de tortillas compradas.

La regla de correspondencia o modelo matemático es:
x = P / C

Pero no olvidemos que P y C son constantes, que al sustituirlas queda:

x = 27 / 4.5
x = 6</td></tr>
<tr><td>b</td><td>6 pesos</td><td>Por lo tanto, el kilogramo de tortilla cuesta $ 6.00. El modelo matemático que describe la regla de correspondencia es:
P = 6C</td></tr>
<tr><td>c</td><td>1 = $ 6.00
2 = $ 12.00
3 = $ 18.00
4 = $ 24.00
5 = $ 30.00</td><td>En la siguiente tabla se muestra el precio a pagar por diferentes cantidades de tortilla.
<table><tr><th>Dominio
Kilogramo de tortilla
C</th><th>Regla de correspondencia
P = 6C</th><th>Codominio
Cantidad a pagar
P</th></tr><tr><td>1</td><td>(6) (1)
(6) (2)
(6) (3)
(6) (4)
(6) (5)</td><td>6
12
18
24
30</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>d</td><td></td><td>La gráfica indica la relación del número de kilogramos de tortillas (eje x) con el precio que se tendría que pagar (eje y). Asimismo, la gráfica representa la relación de la función lineal con la ecuación de primer grado.</td></tr>
<tr><td>e</td><td>Pagará $ 90.00 por
15 kilogramos de tortillas.</td><td>Para saberlo se aplica la regla de correspondencia o modelo matemático encontrado: P = 6C.
Donde, C es igual a 15 kilogramos
P = (6) (15)
P = 90
Por lo tanto, se pagarán $ 90.00 por 15 kilos de tortillas.</td></tr>
</table>

NÚMERO DE RESPUESTA	RESPUESTA CORRECTA	FUNDAMENTACIÓN
f	11.5 kilogramos	Para encontrar la cantidad de kilogramos que se pueden comprar con \$ 69.00, se aplica la regla de correspondencia o modelo matemático, despejando C. $P = 6C$ Despejando C $C = P/6$ Donde, P es igual a 69 $C = 69/6$ $C = 11.5$ Con \$ 69.00 se pueden comprar 11.5 kilos de tortillas.

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

***Cuentas con una hora treinta minutos para resolverlos*.**

INSTRUCCIONES: lee con atención cada uno de los siguientes reactivos y contesta lo que se pide.

1. Dada la ecuación $y = x + 8$

a) Completa la tabulación de acuerdo con los valores de la variable x.

x	**– 2**	**– 1**	**0**	**1**	**2**
y					

b) Construye la gráfica.

c) La gráfica ¿es una línea recta? ____

d) Escribe las coordenadas del corte de la recta con el eje x. ___________________________

____

e) Escribe las coordenadas de la recta con el eje y. ___________________________________

____

2. Dada la ecuación $3x - 10 = y$

a) Completa la tabulación de acuerdo con los valores de la variable x.

x	**– 3**	**– 2**	**– 1**	**0**	**1**	**2**
y						

b) Construye la gráfica.

c) La gráfica ¿es una línea recta? ______________________________

d) Escribe las coordenadas del corte de la recta con el eje x. ______________________________

____

e) Escribe las coordenadas del corte de la recta con el eje y. ______________________________

____

3. Si en general la expresión algebraica de una función lineal es y = mx + b, en donde m representa a la pendiente y b la ordenada al origen, indica el valor de cada uno de los parámetros m y b, completando la siguiente tabla.

FUNCIÓN	VALOR m	VALOR b
y = 4x – 8		
y = – 8x		
y = 8 – 4x		
y = 8 + 8x		
y = 8x		

4. Dada la ecuación: y = -5x + 5

a) Realiza la tabulación.

b) Construye la gráfica.

c) Escribe las coordenadas del corte de la recta con el eje x.

d) Escribe las coordenadas del corte de la recta con el eje y.

e) Con base en la ecuación, indica el valor de la pendiente y el de la ordenada al origen.

5. Dada la ecuación $y = 10x - 5$

a) Realiza la tabulación.

b) Construye la gráfica.

c) Escribe las coordenadas del corte de la recta con el eje x.

d) Escribe las coordenadas del corte de la recta con el eje y.

e) Con base en la ecuación, indica el valor de la pendiente y el de la ordenada al origen.

6. Dada la ecuación: $y = 5x$

a) Realiza la tabulación.

b) Construye la gráfica.

c) Escribe las coordenadas del corte de la recta con el eje x.

d) Escribe las coordenadas del corte de la recta con el eje y.

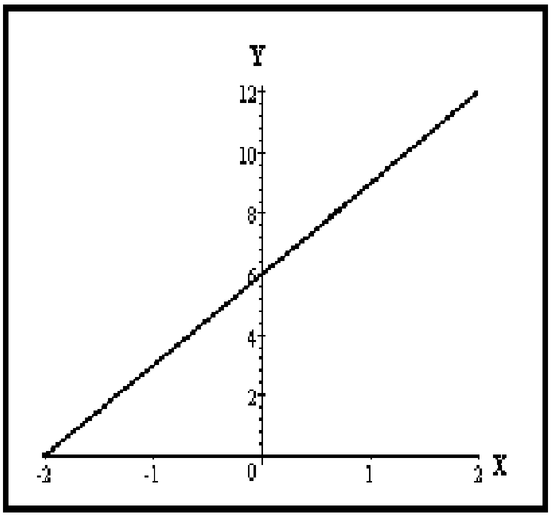
e) Con base en la ecuación, indica el valor de la pendiente y el de la ordenada al origen.

7. *Con base en el análisis de los parámetros de cada función relaciona al modelo matemático con su gráfica correspondiente y anótalo en cada línea.*

a) $y = 3x + 6$
b) $y = -6 - x$
c) $y = -3x$
d) $y = 3x$
e) $y = x - 6$

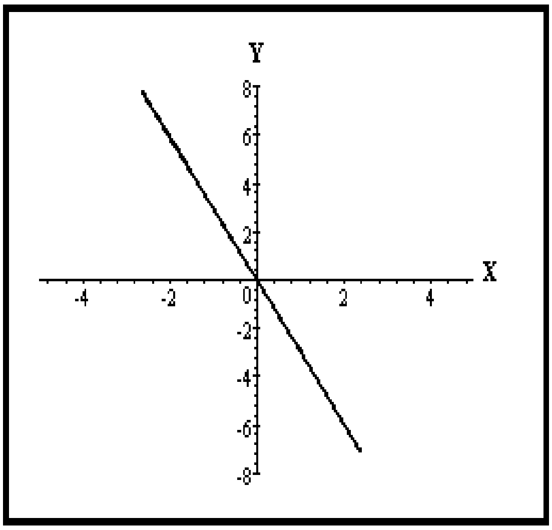
Gráfica 1

MODELO: ______________________________



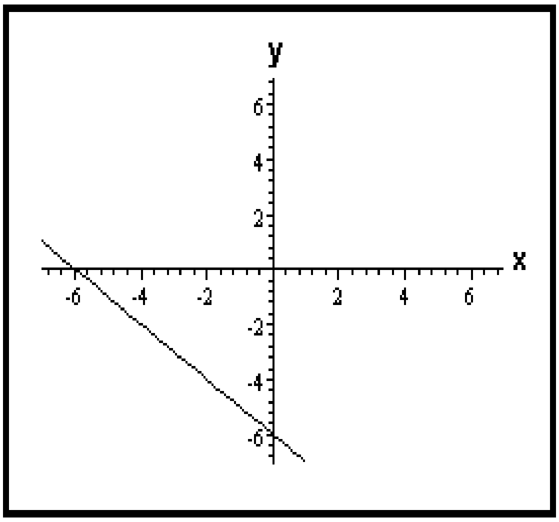
Gráfica 2

MODELO: ______________________________



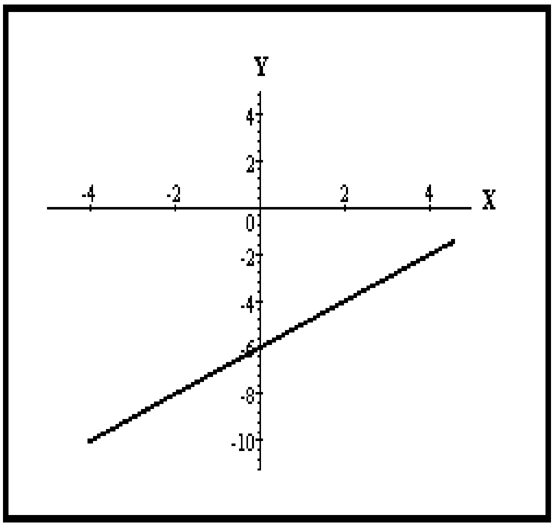
Gráfica 3

MODELO: ______________________________



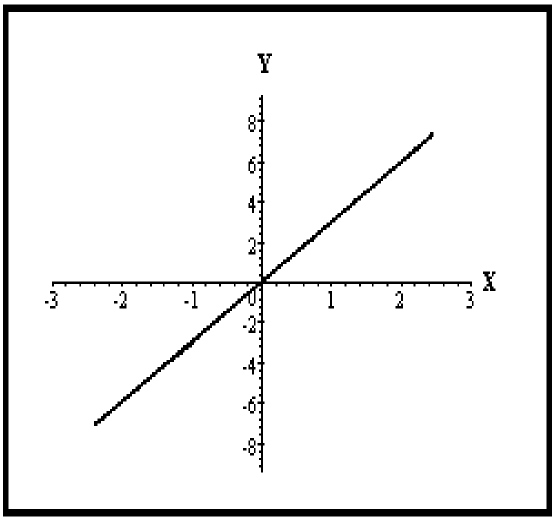
Gráfica 4

MODELO: ______________________________



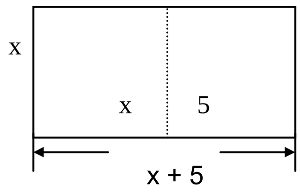
Gráfica 5

MODELO: ______________________________



INSTRUCCIONES: lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se solicita.

8. Dada la siguiente figura



a) Obtén el modelo matemático que represente al perímetro cuando el largo es de 5 cm más que el ancho.

b) Calcula los valores cuando el ancho es 5,10,15 y 20 cm.

c) Realiza la gráfica con los valores obtenidos.

9. Lourdes desea hornear un pastel, pero como su horno tiene la escala en grados Fahrenheit y su receta lo indica en grados Celsius, pide ayuda a su hijo, quien le dice: hay que multiplicar los grados Celsius por nueve quintos y sumarle 32 para obtener los grados Fahrenheit. Con este enunciado obtén:

a) El modelo matemático del problema.

b) Los grados Fahrenheit para cuando Lourdes utilice el horno en 110, 115, 125, 135 y 145 grados Celsius.

c) Muestra los resultados mediante una gráfica.

10. La estatura de un hombre se puede calcular conociendo la medida del húmero, la cual se multiplica por 2.89 y se le suma 70.64.

    a) ¿Cuál es el modelo matemático del problema?

    b) ¿Cuál es la estatura de un hombre cuyo húmero mide 25, 30, 36, 38 o 40 centímetros?

    c) Muestra los resultados en una gráfica.

11. El consumo de agua de un edificio es de 2 150 litros por día y su cisterna tiene una capacidad de 15 000 litros.

    a) Obtener el modelo matemático que representa la existencia de agua en la cisterna después de x días de uso.

    b) ¿Cuántos litros de agua tendrá la cisterna después de 1, 2, 3, 4 y 5 días de uso?

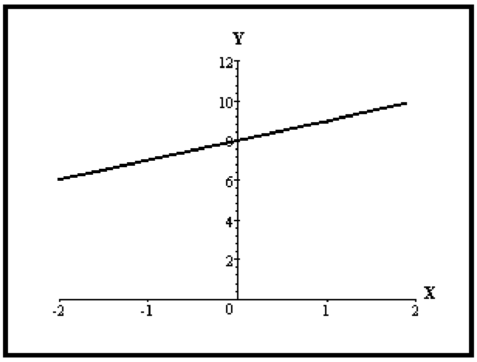
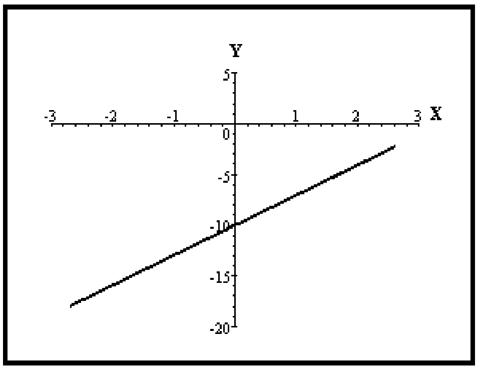
    c) Muestra los resultados en una gráfica.

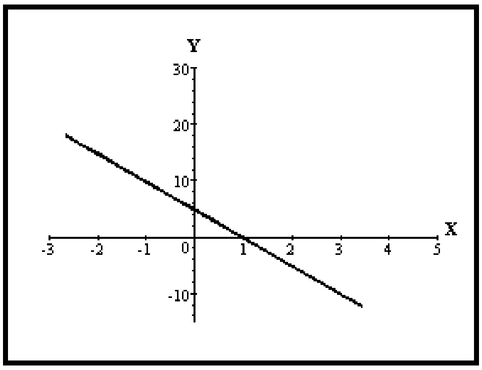
12. Un vendedor recibe 35.00 pesos diarios más 1.50 pesos por artículo que venda.

    a) Obtén el modelo matemático de su sueldo diario.

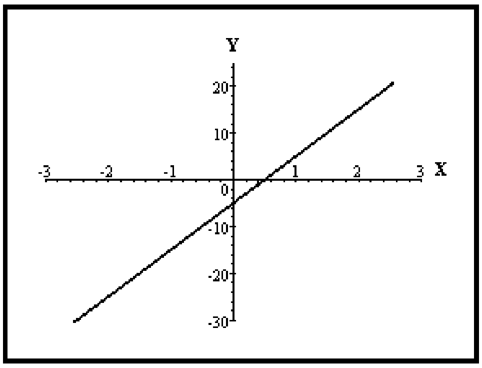
    b) ¿Cuántos artículos vendió si un día ganó $ 42.50?

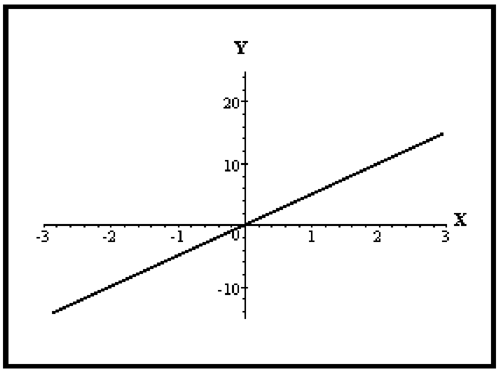
C L A V E   D E   R E S P U E S T A S

<table>
<tr><th>PREGUNTA</th><th>RESPUESTA</th></tr>
<tr><td>1
a</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>– 2</td><td>– 1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>b</td><td>
</td></tr>
<tr><td>c</td><td>Sí es una línea recta.</td></tr>
<tr><td>d</td><td>y = x + 8 corta al eje x en (-8, 0)</td></tr>
<tr><td>e</td><td>y = x + 8 corta al eje y en (0, 8)</td></tr>
<tr><td>2
a</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>– 3</td><td>– 2</td><td>– 1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>– 19</td><td>– 16</td><td>– 13</td><td>– 10</td><td>– 7</td><td>– 4</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>b</td><td>
</td></tr>
<tr><td>c</td><td>Sí es una línea recta.</td></tr>
<tr><td>d</td><td>y = 3x - 10 corta al eje x en (10/3, 0)</td></tr>
<tr><td>e</td><td>y = 3x - 10 corta al eje y en (0, -10)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>PREGUNTA</th><th>RESPUESTA</th></tr>
<tr><td>3</td><td>
<table>
<tr><th>Función</th><th>Pendiente
m</th><th>Ordenada al origen
b</th></tr>
<tr><td>y = 4x – 8</td><td>4</td><td>– 8</td></tr>
<tr><td>y = – 8x</td><td>– 8</td><td>0</td></tr>
<tr><td>y = 8 – 4x</td><td>– 4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>y = 8 + 8x</td><td>8</td><td>8</td></tr>
<tr><td>y = 8x</td><td>8</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>4
a</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>– 2</th><th>– 1</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><th>y</th><td>15</td><td>10</td><td>5</td><td>0</td><td>– 5</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>b</td><td>


</td></tr>
<tr><td>c</td><td>y = -5x + 5 corta al eje x en (1, 0)</td></tr>
<tr><td>d</td><td>y = -5x + 5 corta al eje y en (0, 5)</td></tr>
<tr><td>e</td><td>Forma: y = mx + b
m = -5
b = 5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>PREGUNTA</th><th>RESPUESTA</th></tr>
<tr><td>5
a</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>– 2</th><th>– 1</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td>y</td><td>– 25</td><td>– 15</td><td>– 5</td><td>5</td><td>15</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>b</td><td>


</td></tr>
<tr><td>c</td><td>y = 10x - 5 corta al eje x en (1/2, 0)</td></tr>
<tr><td>d</td><td>y = 10x - 5 corta al eje y en (0, -5)</td></tr>
<tr><td>e</td><td>Forma: y = mx + b
m = 10
b = 5</td></tr>
<tr><td>6
a</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>– 2</th><th>– 1</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td>y</td><td>– 10</td><td>– 5</td><td>0</td><td>5</td><td>10</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>b</td><td>


</td></tr>
<tr><td>c</td><td>y = 5x corta al eje x en (0, 0)</td></tr>
<tr><td>d</td><td>y = 5x corta al eje y en (0, 0)</td></tr>
<tr><td>e</td><td>Forma: y = mx
m = 5
b = 0</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>PREGUNTA</th><th>RESPUESTA</th></tr>
<tr><td>7</td><td>Gráfica 1 con inciso a
Gráfica 2 con inciso c
Gráfica 3 con inciso b
Gráfica 4 con inciso e
Gráfica 5 con inciso d</td></tr>
<tr><td>8
a

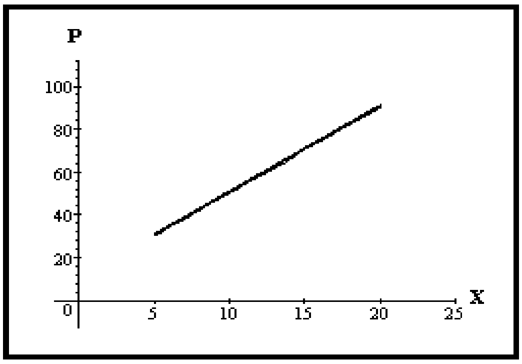
b

c</td><td>

$P = 2x + 2(x+5)$

Simplificando: $P = 4x + 10$

<table>
<tr><th>x</th><th>5</th><th>10</th><th>15</th><th>20</th></tr>
<tr><td>P</td><td>30</td><td>50</td><td>70</td><td>90</td></tr>
</table>

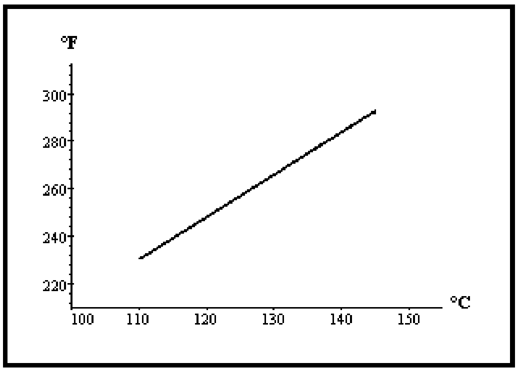


</td></tr>
<tr><td>9
a
b

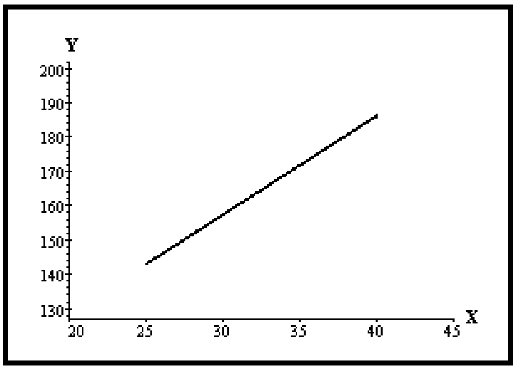
c</td><td>

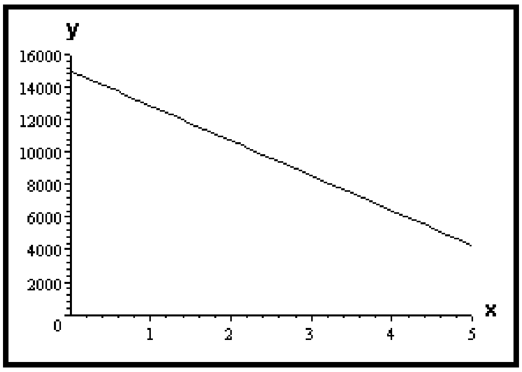
$°F = (9/5)\ (°C) + 32$

<table>
<tr><th>ºC</th><th>110</th><th>115</th><th>125</th><th>135</th><th>145</th></tr>
<tr><td>ºF</td><td>230</td><td>239</td><td>257</td><td>275</td><td>293</td></tr>
</table>



</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>PREGUNTA</th><th>RESPUESTA</th></tr>
<tr><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td>y = 2.89x + 70.64</td></tr>
<tr><td>b</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>25</th><th>30</th><th>36</th><th>38</th><th>40</th></tr>
<tr><td>y</td><td>142.89</td><td>157.34</td><td>174.68</td><td>180.46</td><td>186.24</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>c</td><td>


</td></tr>
<tr><td>11</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td>y = 15000 − 2150x</td></tr>
<tr><td>b</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td>y</td><td>15,000</td><td>12,850</td><td>10,700</td><td>8,550</td><td>6,400</td><td>4,250</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>c</td><td>


</td></tr>
<tr><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>a</td><td>y = 35 + 1.5x</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Vendió 5 artículos.</td></tr>
</table>

Unidad 2

Funciones polinomiales y su representación gráfica

2.1 Función polinomial cuadrática, su relación con la ecuación cuadrática

APRENDIZAJES

- Identificar los elementos de la ecuación cuadrática.
- Aplicar métodos algebraicos en la solución de ecuaciones cuadráticas.
- Representar gráficamente la función cuadrática.
- Aplicar la función cuadrática en la solución de problemas.
- Relacionar los aspectos algebraicos con los gráficos de la función cuadrática.
- Representar gráficamente otras funciones polinomiales de grado 3 y 4.
- Identificar los aspectos algebraicos de la función polinomial de grado mayor que dos.
- Identificar los aspectos geométricos de la función polinomial.
- Relacionar los aspectos algebraicos y geométricos de la función polinomial.

En esta unidad se analizará la **función cuadrática**, cuya representación gráfica es una línea curva llamada **parábola**; de acuerdo con los valores que se consideren para la variable independiente *x* se pueden obtener diferentes posiciones, una rama o una sección de la parábola. La expresión algebraica está dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

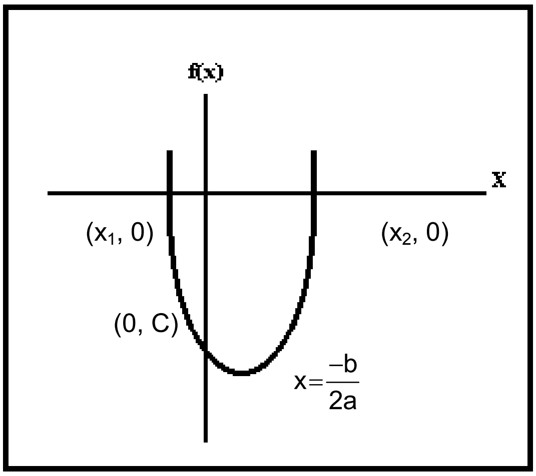
Al ubicar la parábola en un sistema de ejes coordenados se observa que:

a) Existen dos cortes en el eje de las abscisas (*x*), denominados **raíces** cuyas coordenadas son $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

b) Un corte en el eje de las ordenadas (y) con coordenadas $(0,c)$.

c) Un valor máximo o mínimo a partir del cual la gráfica es simétrica, conocido como vértice de la parábola**, cuyo valor de su abscisa se obtiene mediante la expresión** $x = -b/2a$**.**

Este último es fundamental para calcular el dominio de la función a partir de la abscisa del vértice, en el cual se da igual número de valores hacia la izquierda que a la derecha.



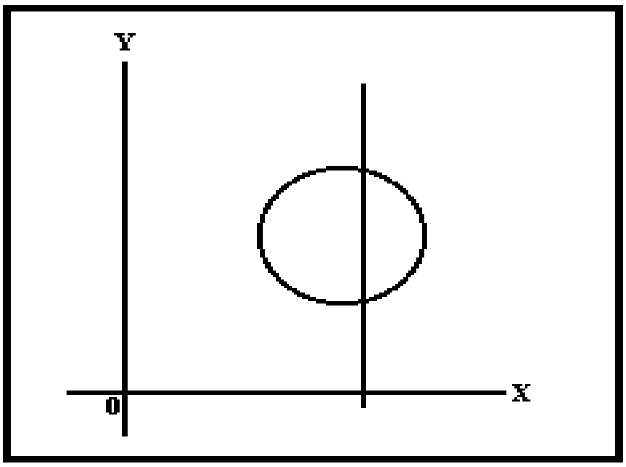
Una función es un conjunto de pares ordenados y dos pares diferentes que no tienen el mismo primer componente. Esto significa que, al representar geométricamente la gráfica de una función, a cada punto le corresponde diferente abscisa, de manera que al trazar rectas paralelas al eje de las ordenadas por cualquier valor del dominio, cada una corta la representación geométrica en un punto a lo más, lo que se denomina *CRITERIO DE LA VERTICAL*.

Si sólo se da la representación geométrica de una gráfica para determinar si representa o no a una función, por su dominio se trazan rectas paralelas al eje de las ordenadas, y si una de ellas la corta en más de un punto, entonces no corresponde a una función, pues existe al menos un elemento del dominio que tiene más de una imagen.

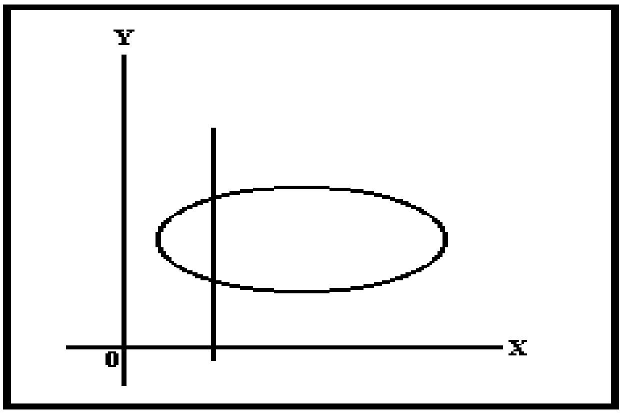
Si cualquier recta vertical que se trace a una gráfica sólo corta a ésta en un punto y sólo uno, es función; si se corta en dos o más puntos se trata de una relación.

Ejemplos

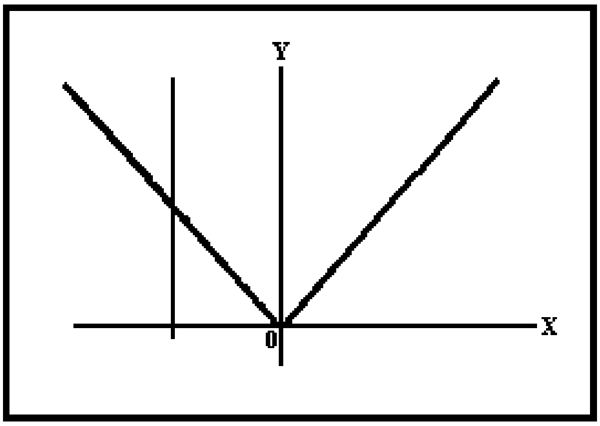
Esta gráfica no es función porque toca en dos puntos a la circunferencia, por lo tanto es una relación.



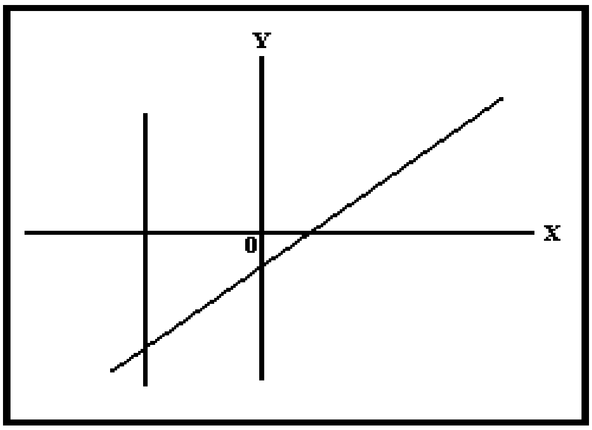
Esta gráfica no es función porque toca en dos puntos a la elipse, por lo tanto es una relación.



Esta gráfica sí es función porque toca en un punto a la recta.



Esta gráfica sí es función porque toca en un punto a la recta.



P R O B L E M A S

1. El defensa de un equipo de fútbol soccer realiza un saque de meta, de manera que la trayectoria que describe el balón está representada por la función h = 10t □ 5t^2

   a) ¿Cuáles son las variables dependiente e independiente?

   b) Determina el lugar geométrico.

   c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el balón?

   d) ¿Cuáles son las coordenadas de las raíces de la función?

Solución:

a) Como la altura *(h)* depende del tiempo, entonces *h* es la variable dependiente y el tiempo *(t)* es la variable independiente, es decir:

x es t, $f(x) = h$

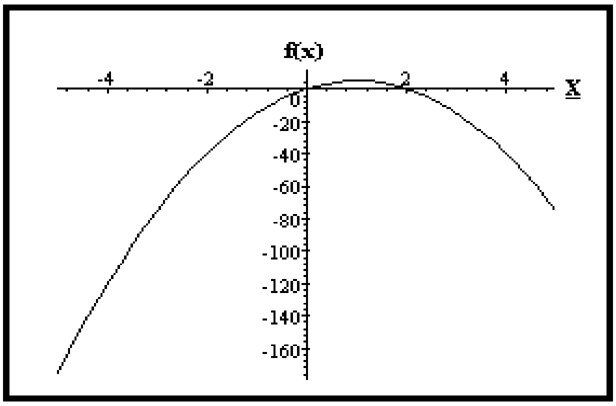
por lo que si: $h = 10t - 5t^2$

entonces: $f(x) = 10x - 5x^2$

b) Para determinar el lugar geométrico se asignan valores a la variable independiente; por ejemplo, $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, y al sustituirlos se obtiene la tabulación:

DOMINIO	REGLA DE CORRESPONDENCIA	CONTRADOMINIO
Tiempo	$\boldsymbol{10x - 5x^2}$	**Altura**
-3	$10(-3) - 5(-3)^2$	-75 m
-2	$10(-2) - 5(-2)^2$	-40 m
-1	$10(-1) - 5(-1)^2$	-15 m
0	$10(0) - 5(0)^2$	0 m
1	$10(1) - 5(1)^2$	5 m
2	$10(2) - 5(2)^2$	0 m
3	$10(3) - 5(3)^2$	-15 m

Llevando los valores de x y f(x) a un sistema de ejes coordenados:



c) La altura máxima se puede obtener de manera gráfica o bien analíticamente si calculamos las coordenadas del vértice de la parábola.

$f(x) = 10x - 5x^2$

$f(x) = -5x^2 + 10x$ comparando con:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ los valores de las constantes son:

$a = -5,\ b = +10,\ c = 0$

por lo que: $x = -b/2a$

$x = -10/2(-5) = -10/-10$

$x = 1$

sustituyendo $x = 1$ *en* $f(x) = 10x - 5x^2$

$$f(x) = 10(1) - 5(1)^2 = 10 - 5 = 5$$

POR LO QUE LA ALTURA MÁXIMA ES DE 5 METROS, CUANDO x = 1

d) Para calcular las raíces de la función, se deben considerar éstas como coordenadas $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$; por consiguiente si $y = 0$, es decir, $f(x) = 0$, entonces $f(x) = 10x - 5x^2$, formándose una ecuación de segundo grado, que se puede resolver por el método de factorización o por fórmula general.

Utilizando el método de factorización:

$0 = 10x - 5x^2$
$0 = 5x(2 - x)$

$0 = 5x_1$
$0/5 = x_1$
$0 = x_1$

$0 = 2 - x_2$
$x_2 = 2$

Raíces (0, 0) y (2, 0).

Por el método de fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(-5)(0)}}{2(-5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{(100) - 0}}{-10}$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm 10}{-10}$$

$$x_1 = \frac{-10 + 10}{-10}$$
$$x_1 = \frac{0}{-10}$$
$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{-10 - 10}{-10}$$
$$x_2 = \frac{-20}{-10}$$
$$x_2 = 2$$

Las raíces son: (0, 0) y (2, 0).

2. El costo mínimo de un artículo deportivo está dado por la función: $f(x) = x^2 - 2x + 4$

   a) Elabora la gráfica que represente el problema.

   b) Calcula las coordenadas del vértice de la parábola.

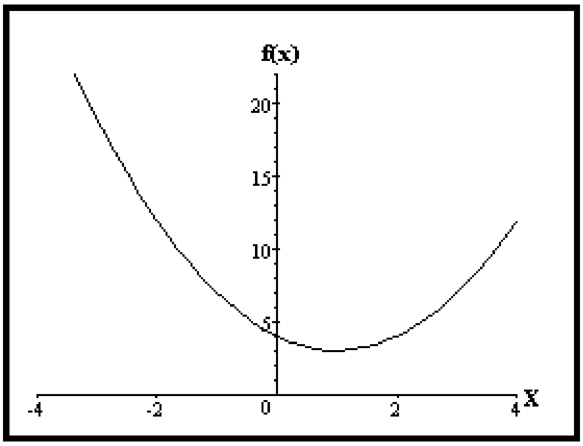
   c) ¿Cuál es el costo mínimo del artículo deportivo?

Solución:

a) Para determinar la gráfica se asignan valores a la variable independiente; por ejemplo, x = –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, que al substituir en la función, se obtienen los siguientes valores.

x	**$f(x) = x^2 - 2x + 4$**	**f (x)**	**(x, f (x))**
–3	$f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) + 4$	19	(–3, 19)
–2	$f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) + 4$	12	(–2, 12)
–1	$f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 4$	7	(–1, 7)
0	$f(0) = (0)^2 - 2(0) + 4$	4	(0, 4)
1	$f(1) = (1)^2 - 2(1) + 4$	3	(1, 3)
2	$f(2) = (2)^2 - 2(2) + 4$	4	(2, 4)
3	$f(3) = (3)^2 - 2(3) + 4$	7	(3, 7)

La gráfica de la función es la siguiente:



b) Para obtener el vértice de la parábola utilizamos la fórmula $x = \frac{-b}{2a}$; comparando la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$ con la función $f(x) = x^2 - 2x + 4$, observamos que los valores de a, b y c son: $a = 1$, $b = -2$ y $c = 4$

Por lo que $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$

Por lo tanto, en x = 1 está el vértice, o sea v (1,3).

c) El costo mínimo del artículo deportivo se puede conocer de dos maneras: i) de la gráfica y ii) conociendo el vértice.

i) De la gráfica: vemos que cuando x = 1, f (x) = 3; por lo tanto, en el punto (1, 3) se tiene el costo mínimo del artículo deportivo.

ii) Conociendo el vértice: si x = 1, este valor se sustituye en la función:

$f(1) = (1)^2 - 2(1) + 4$
$f(1) = 1 - 2 + 4$
$f(1) = 5 - 2$
$f(1) = 3$

Por lo tanto, cuando x = 1, f(x) = 3, o sea, en el punto (1, 3) está el costo mínimo.

PROBLEMA A RESOLVER

Resuelve el siguiente problema:

El costo de fabricación, en pesos, de una chamarra está dado por la función:

$$f(x) = x^2 - 10x + 175$$

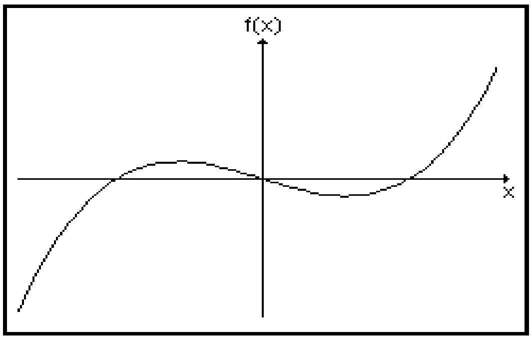
a) Elabora la gráfica que represente el problema.

b) Calcula las coordenadas del vértice de la parábola.

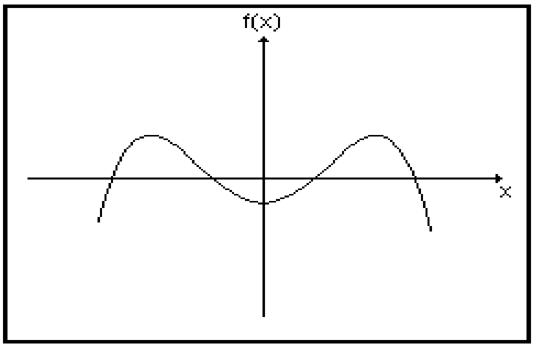
c) ¿Cuál es el costo mínimo de fabricación?

2.1 Otras funciones polinomiales: representación gráfica

Para **funciones polinomiales** de grado mayor que dos se usan las mismas técnicas para construir las gráficas; además, existen indicadores que nos permiten conocer el comportamiento de las mismas. Por ejemplo, el número de veces que sube y baja la gráfica de la función o cuando asciende o desciende de manera indefinida. Observa las siguientes gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que dos.



Función de tercer grado



Función de cuarto grado

En la siguiente tabla se indican algunas características de las funciones polinomiales.

GRADO DE LA FUNCIÓN	NÚMERO DE VECES QUE LA FUNCIÓN		
	ASCIENDE	DESCIENDE	TOTAL
2°	1	1	2
3°	2	1	3
4°	2	2	4
5°	3	2	5

En las funciones con grado 3 y 5 el número de ascensos y descensos puede invertirse, siendo siempre el total indicado.

La gráfica de funciones polinomiales no tiene interrupciones, es decir, es continua.

Observa cómo se construye la gráfica de una función polinomial por el procedimiento de tabulación.

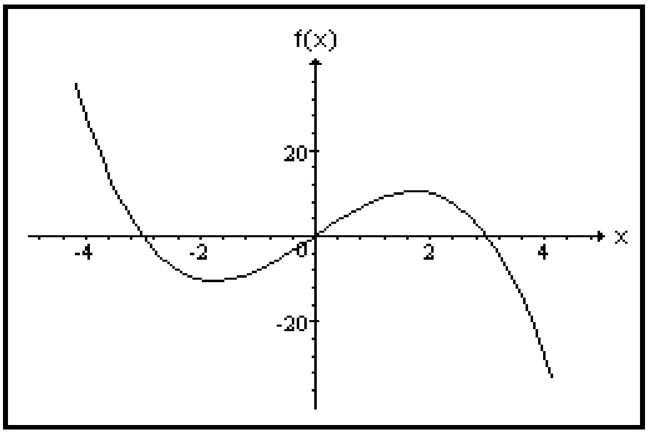
PROBLEMA

Obtener la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 9x$ usando el procedimiento de tabulación.

SOLUCIÓN

Para determinar la gráfica se asignan valores a la variable independiente; por ejemplo, $x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4, que al sustituirlos en la función polinomial se obtienen los resultados siguientes:

x	**$f(x) = -x^3 + 9x$**	**f(x)**	**(x, f(x))**
-4	$-(-4)^3 + 9(-4)$	28	$(-4, 28)$
-3	$-(-3)^3 + 9(-3)$	0	$(-3, 0)$
-2	$-(-2)^3 + 9(-2)$	-10	$(-2, -10)$
-1	$-(-1)^3 + 9(-1)$	-8	$(-1, -8)$
0	$-(0)^3 + 9(0)$	0	$(0, 0)$
1	$-(1)^3 + 9(1)$	8	$(1, 8)$
2	$-(2)^3 + 9(2)$	10	$(2, 10)$
3	$-(3)^3 + 9(3)$	0	$(3, 0)$
4	$-(4)^3 + 9(4)$	-28	$(4, -28)$



De la gráfica podemos observar que la función, al ser de grado tres, el número que desciende y asciende es tres.

Ahora realiza el siguiente ejercicio.

P R O B L E M A   A   R E S O L V E R

Usando el procedimiento de tabulación obtén la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$; toma los valores de $x = -1, -0.5; 0, 0.5; 1, 1.5; 2, 2.5; 3$ y 3.5.

E J E R C I C I O S

INSTRUCCIONES: lee con atención cada uno de los siguientes reactivos y contesta lo que se pide.

1. Dada la siguiente ecuación cuadrática $3x^2 - 36x + 108 = 0$

   a) Identifica los valores de a, b y c.

   b) Calcula las coordenadas del vértice.

2. Para la siguiente ecuación cuadrática $80 – 28x + 2x^2 = 0$

   a) Identifica los valores de a, b y c.

   b) Calcula las coordenadas del vértice.

3. Dada la función cuadrática $2x^2 - 32x = 0$

   a) Identifica los valores de a, b y c.

   b) Calcula las coordenadas del vértice.

4. Mediante el método de factorización encuentra las raíces de la siguiente ecuación cuadrática.

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

5. A través del método de la fórmula general, obtén las raíces de la ecuación cuadrática $-15x^2 + 11x - 2 = 0$

6. Dada la siguiente función $f(x) = -3x^2 - x + 2$

   a) Realiza la tabulación con x = -2, -1, 0, 1 y 2.

   b) Construye la gráfica.

7. Un cohete lanzado al espacio describe una trayectoria dada por $p(t) = 1200t - 2t^2$

   a) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?
   b) ¿Cuál es el dominio de la función?
   c) Realiza la gráfica.

8. Se tiene un terreno rectangular que se quiere cercar por los cuatro lados.

   a) Calcula las dimensiones del terreno si se tiene una malla de 400 metros lineales y el área debe ser de 7,500 m^2.

   b) Obtén el modelo matemático del problema.

9. Dada la función polinomial $f(x) = x^3 – 5x + 3$

a) Realiza la tabulación tomando los valores de x = -2, -1, 0, 1.5, 2 y 3.

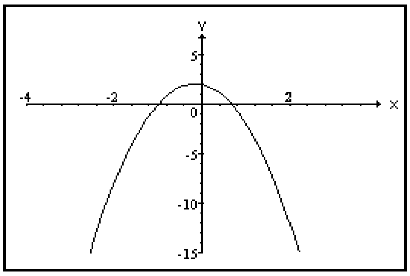
b) Construye la gráfica.

TABLA DE COMPROBACIÓN

NÚMERO DE PREGUNTA	RESPUESTA	FUNDAMENTACIÓN
1		El vértice lo calculas con la fórmula: $x = \frac{-b}{2a}$
a	a = 3; b = □□36; c = 108	Sustituye el valor de x = 6 en la ecuación y se obtiene:
b	v (6, 0)	$3(6)^2 - 36(6) + 108 =$ $3(36) - 216 + 108 =$ $108 - 216 + 108 = 0$ Por lo tanto, las coordenadas del vértice son v(6, 0).
2		$x \frac{-(-28)}{2(2)} = \frac{28}{4} = 7$
a	a = 2; b = □□28; c = 80	Sustituye el valor de x = 7 en la ecuación y se obtiene:
b	v (7, □□18)	$80 - 28(7) + 2(7)^2 =$ 80 – 196 + 98 = □18 Por lo tanto, v(7, □18)
3		$x = \frac{-(-32)}{2(2)} = \frac{32}{4} = 8$
a	a = 2; b = □□32; c = 0	Sustituye el valor de x = 8 en la ecuación y se obtiene:
b	v (8, □□128)	$2(8)^2 - 32(8) =$ 128 – 256 = □128 Por lo tanto, v(8, □□128)
4	Las raíces son (5, 0) y (□□3, 0)	Método de factorización $x^2 - 2x - 15 = 0$ $(x - 5)(x + 3) = 0$ $x - 5 = 0$, $x_1 = 5$ $x + 3 = 0$, $x_2 = -3$

<table>
<tr><th>NÚMERO DE PREGUNTA</th><th>RESPUESTA</th><th>FUNDAMENTACIÓN</th></tr>
<tr><td>5</td><td>Las raíces son $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$ y $\left(\frac{2}{5},\ 0\right)$</td><td>Método de fórmula general
$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{(11)^2 - 4(-15)(-2)}}{2(-15)}$
$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 120}}{-30}$
$x_{1,2} = \frac{-11 \pm 1}{-30}$
$x_1 = \frac{-11 + 1}{-30}$ $x_1 = \frac{-10}{-30}$ $x_1 = \frac{1}{3}$
$x_2 = \frac{-11 - 1}{-30}$ $x_2 = \frac{-12}{-30}$ $x_2 = \frac{2}{5}$</td></tr>
<tr><td>6

a

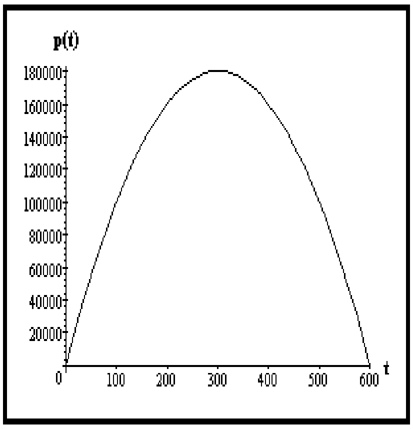
b</td><td colspan="2">$f(x) = -3x^2 - x + 2$
<table><tr><th>X</th><th>$f(x) = -3x^2 - x + 2$</th><th>f(x)</th><th>(x, f(x))</th></tr><tr><td>-2</td><td>$-3(-2)^2 - (-2) + 2$</td><td>-8</td><td>$(-2, -8)$</td></tr><tr><td>-1</td><td>$-3(-1)^2 - (-1) + 2$</td><td>0</td><td>$(-1, 0)$</td></tr><tr><td>0</td><td>$-3(0)^2 - (0) + 2$</td><td>2</td><td>$(0, 2)$</td></tr><tr><td>1</td><td>$-3(1)^2 - (1) + 2$</td><td>-2</td><td>$(1, -2)$</td></tr><tr><td>2</td><td>$-3(2)^2 - (2) + 2$</td><td>-12</td><td>$(2, -12)$</td></tr></table>
</td></tr>
<tr><td>7

a</td><td>Las coordenadas del vértice son (300, 180 000)</td><td>Para obtener las coordenadas del vértice se emplea la expresión $x = -b / 2a$.

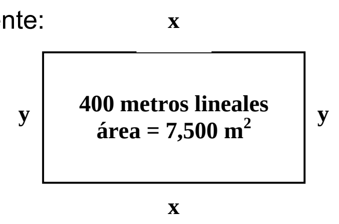
Si $p(t) = 1{,}200t - 2t^2$
entonces: $a = -2$; $b = 1{,}200$; $c = 0$

$t = -1{,}200/2(-2) = -1{,}200/-4$ $t = 300$
$p(300) = 1{,}200(300) - 2(300)^2$
$p(300) = 360{,}000 - 180{,}000$
$p(300) = 180{,}000$

Las coordenadas del vértice son: (300, 180 000)</td></tr>
</table>

NÚMERO DE PREGUNTA	RESPUESTA	FUNDAMENTACIÓN
7		El dominio sólo puede tomar valores positivos por tratarse de tiempo. Igualando a cero se tiene: $P(t) = 0$ $0 = 1{,}200t - 2t^2$ $0 = 2t\,(600 - t)$ $0 = 2t$ → $t = 0$ $600 - t = 0$ → $600 = t$
b	Los valores van de $0 \le t \le 600$	
c	La gráfica de la función es la siguiente:  	Para la tabulación se sugiere dar valores de 100 en 100:

DOMINIO t	REGLA DE CORRESPONDENCIA $1{,}200t - 2t^2$	CONTRADOMINIO p(t)
0	$1200(0) - 2(0)^2$	0
100	$1{,}200(100) - 2(100)^2$	100,000
200	$1{,}200(200) - 2(200)^2$	160,000
300	$1{,}200(300) - 2(300)^2$	180,000
400	$1{,}200(400) - 2(400)^2$	160,000
500	$1{,}200(500) - 2(500)^2$	100,000
600	$1{,}200(600) - 2(600)^2$	0

NÚMERO DE PREGUNTA	RESPUESTA	FUNDAMENTACIÓN
8		Para hallar el modelo matemático del problema se plantea lo siguiente:
a	Dimensiones del terreno: Ancho = 50 metros Largo = 150 metros	
b	Modelo matemático: $7{,}500 = x(200 - x)$ $7{,}500 = 200x - x^2$	Al aplicar la fórmula del perímetro al rectángulo tenemos que $2x + 2y = 400$, donde al despejar la variable **y** queda: $y = 200 - x$

NÚMERO DE PREGUNTA	RESPUESTA	FUNDAMENTACIÓN

Como la fórmula del área de un rectángulo es A = xy, se sustituye el valor de A y el valor hallado de y, obteniendo la siguiente ecuación:

$$7,500 = x(200 - x)$$

$$7,500 = 200x - x^2$$

SIENDO ÉSTA LA EXPRESIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO BUSCADO.

Para obtener los valores del largo y ancho se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$0 = -x^2 + 200x - 7,500$$
donde: $a = -1$, $b = 200$, $c = -7,500$

Utilizando la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-200 \pm \sqrt{(200)^2 - 4(-1)(-7500)}}{2(-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-200 \pm \sqrt{40000 - 30000}}{-2}$$

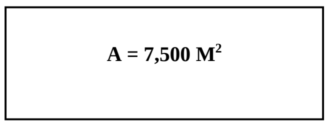
$$x_{1,2} = \frac{-200 \pm \sqrt{10000}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-200 \pm 100}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-200 + 100}{-2} \qquad x_1 = \frac{-100}{-2} \qquad x_1 = 50$$

$$x_2 = \frac{-200 - 100}{-2} \qquad x_2 = \frac{-300}{-2} \qquad x_2 = 150$$

EL ANCHO DEL TERRENO RECTANGULAR ES DE 50 METROS Y EL LARGO DE 150 METROS



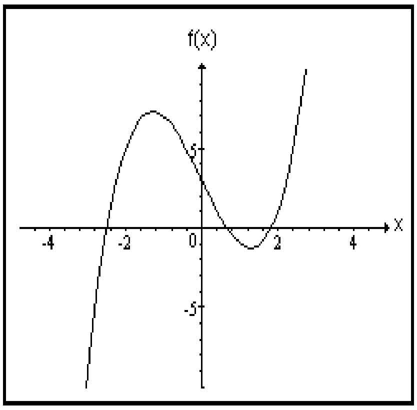
50

150

NÚMERO DE PREGUNTA	RESPUESTA	FUNDAMENTACIÓN
9	Se realiza la tabulación con los valores de x.	
a		

X	$f(x) = x^3 – 5x + 3$	f(x)	(x, f(x))
□□2	$(□□2)^3 – 5(□□2) + 3$	5	(□□2, 5)
□□1	$(□□1)^3 – 5(□□1) + 3$	7	(□□1, 7)
0	$(0)^3 – 5(0) + 3$	3	(0, 3)
1	$(1)^3 – 5(1) + 3$	□□1	(1, □□1)
1.5	$(1.5)^3 – 5(1.5) + 3$	□□1.125	(1.5, □□1.125)
2	$(2)^3 – 5(2) + 3$	1	(2, 1)
3	$(3)^3 – 5(3) + 3$	15	(3, 15)

b



EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

INSTRUCCIONES: lee con atención cada uno de los siguientes reactivos y contesta lo que se pide. Para resolver los ejercicios ***cuentas con una hora treinta minutos***.

1. Dada la función $f(x) = x^2$

   a) Realiza la tabulación.

   b) Construye la gráfica.

   c) Si la expresión algebraica de una función cuadrática es $f(x) = ax^2 + bx + c$, indica qué valores tiene cada elemento de la función.

2. Para la función $f(x) = -x^2 + 4$

   a) Realiza la tabulación.

b) Construye la gráfica.

c) Indica los valores de a, b y c.

d) ¿Sobre qué eje se desplaza la gráfica?

3. Dada la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

a) Realiza la tabulación.

b) Construye la gráfica.

c) Indica los valores de a, b y c.

d) Indica si la gráfica se desplaza hacia la derecha o hacia la izquierda.

4. Sin tabular y con base en lo anterior realiza el bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = x^2 – 5x + 6$.

5. Construye el bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = – x^2$.

6. Elabora el bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x – 6$

INSTRUCCIONES: lee con atención los siguientes enunciados y realiza lo que se pide en los reactivos 4 al 6.

- Si **a** es positiva, la gráfica abre hacia arriba y si **b** = 0 y **c** = 0 pasa por el origen.
- Cuando el parámetro **c** es diferente de cero, la gráfica se desplaza hasta el valor de **c** cortando en este punto al eje y.
- Si **b** es positiva, la gráfica se desplaza hacia la izquierda, siempre y cuando exista valor en **a** y **c**, y si **b** es negativa su desplazamiento es a la derecha. No olvides que la gráfica es simétrica en un punto denominado vértice.

7. ( ) Al aplicar el método de factorización a la ecuación $x^2 + 7x + 12 = 0$, encontramos que sus raíces son:

   a) $x_1 = 1, x_2 = 6$
   b) $x_1 = 3, x_2 = 4$
   c) $x_1 = \square\ 4, x_2 = \square\ 3$
   d) $x_1 = \square\ 1, x_2 = \square\ 6$

8. ( ) Encuentra las raíces de la ecuación $4x^2 + 2x = 0$, mediante el método de factorización.

   a) $x_1 = 0, x_2 = \square ½$
   b) $x_1 = \square\square ½, x_2 = ½$
   c) $x_1 = 0, x_2 = ½$
   d) $x_1 = 1/3, x_2 = 0$

9. ( ) ¿Cuál es el valor de las raíces de la ecuación $2x^2 + 11x\ \square\ 21 = 0$, si aplicas el método de factorización?

   a) $x_1 = \square\ 3/2, x_2 = \square\ 7$
   b) $x_1 = 3/2, x_2 = \square\ 7$
   c) $x_1 = \square\ 3/2, x_2 = 7$
   d) $x_1 = 3/2, x_2 = 7$

10. ( ) Resuelve la ecuación $x^2\ \square\ 6x\ \square\ 27 = 0$, utilizando el método de completar el trinomio cuadrado perfecto.

   a) $x_1 = 9, x_2 = 3$
   b) $x_1 = \square\ 9, x_2 = \square\ 3$
   c) $x_1 = 9, x_2 = \square\ 3$
   d) $x_1 = \square\ 9, x_2 = 3$

11. ( ) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $x^2\ \square\ 8x\ \square\ 48 = 0$, si aplicas el método de completar el trinomio cuadrado perfecto?

   a) $x_1 = 12, x_2 = 4$
   b) $x_1 = 12, x_2 = \square\ 4$
   c) $x_1 = \square\square 12, x_2 = \square\ 3$
   d) $x_1 = \square\ 12, x_2 = 3$

12. (   ) Al aplicar el método de completar el trinomio cuadrado perfecto a la ecuación $4x^2 \square 8x \square 8 = 0$, encontramos que sus raíces son:

a) $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 \square \sqrt{3}$
b) $x_1 = \square 3$, $x_2 = \square 3$
c) $x_1 = 4$, $x_2 = \square 2$
d) $x_1 = 9$, $x_2 = \square 3$

13. (   ) Encuentra las raíces de la ecuación $3x^2 \square 7x + 4 = 0$, mediante la fórmula general.

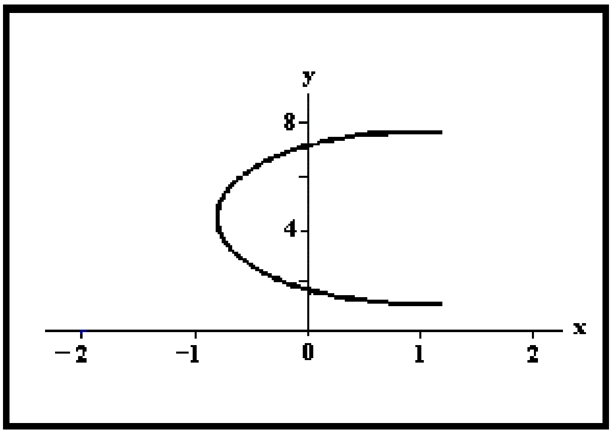
a) $x_1 = 4/3$, $x_2 = \square 1$
b) $x_1 = 4/3$, $x_2 = 1$
c) $x_1 = \square 4/3$, $x_2 = 1$
d) $x_1 = \square 4/3$, $x_2 = \square 1$

14. (   ) Aplica la fórmula general y obtén las raíces de la ecuación $x^2 – 11x + 24 = 0$.

a) $x_1 = 3$, $x_2 = 8$
b) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$
c) $x_1 = \square 4$, $x_2 = 8$
d) $x_1 = \square 3$, $x_2 = \square 1$

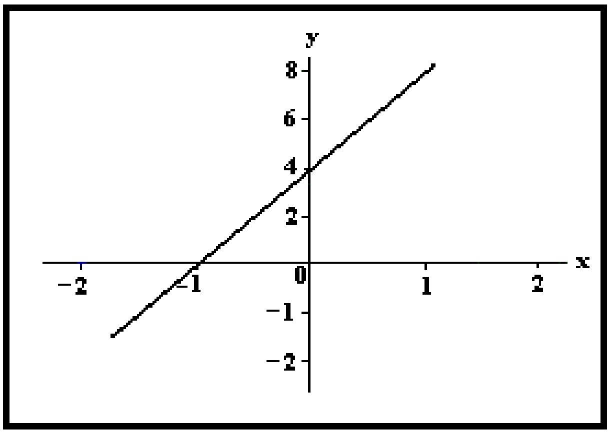
INSTRUCCIONES: Utilizando el criterio de la vertical, indica cuáles de las siguientes gráficas son funciones y cuáles son relaciones. Justifica tu respuesta.

15.



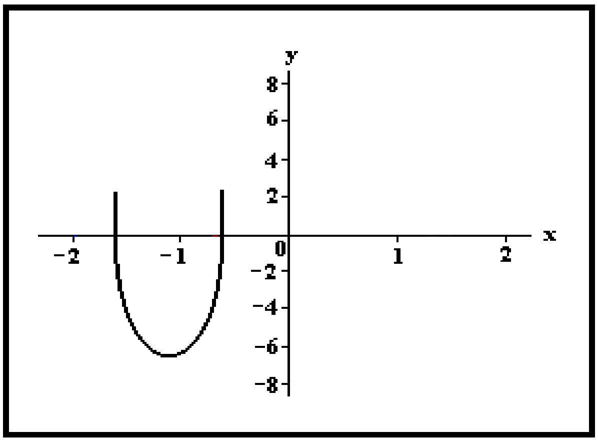
a) ___________________________________
____
____

16.



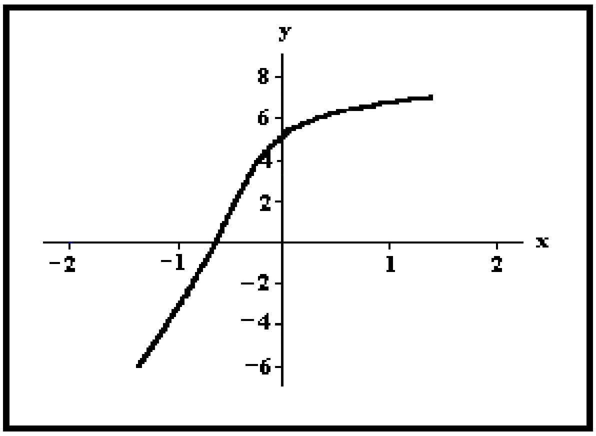
b) ____________________________________
____
____

17.



c) ____________________________________
____
____

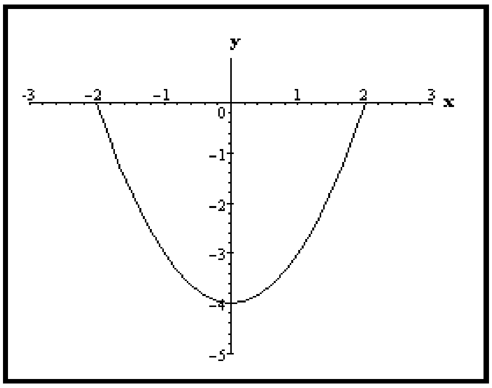
18.



d) ______________________________
____
____

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y anota en el paréntesis de la izquierda la letra de la opción que conteste correctamente.

19. (   ) Analiza la siguiente gráfica



la función que le corresponde es:

a) $f(x) = x^2 + 4$
b) $f(x) = 2x^2 - 4$
c) $f(x) = -2x^2 + 4$
d) $f(x) = x^2 - 4$

20. (   ) Dada la siguiente función $f(x) = 2x^2 - 4$, determina el punto de intersección con el eje **y**.

a) (0, 4)
b) (0, −4)
c) (−4, 0)
d) (4, 0)

INSTRUCCIONES: lee con atención los siguientes reactivos y realiza lo que se solicita en cada caso.

21. Escribe en el paréntesis de la izquierda V si es verdadero o F si es falso el modelo matemático correspondiente a cada enunciado.

( ) Las dimensiones de un rectángulo si su longitud es de 10 metros más que su anchura y su área es de 96 metros cuadrados.

A = (10 + x) x

$$x^2 + 10x - 96 = 0$$

( ) Dos números enteros positivos pares y consecutivos cuya multiplicación da como resultado 288.

$$288 = x(x + 2)$$

$$x^2 + 2x - 288 = 0$$

( ) El automóvil A es 15 km/h más rápido que el B. Si A recorre 800 km en 12 horas menos que B, encuentra la velocidad de ambos autos.

$$\frac{800}{x+15} - \frac{800}{x} = 12$$

( ) El cateto de un triángulo rectángulo mide 1 metro más que el otro cateto. Si la hipotenusa mide 5 metros, obtener las dimensiones de los catetos.

$$x^2 + (x + 1)^2 - 288 = 0$$

22. Dada la función $f(x) = x^3 - 5x$

a) Realiza la tabulación.

b) Construye la gráfica.

CLAVE DE RESPUESTAS

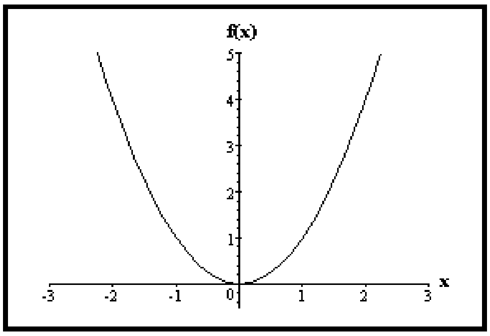
PREGUNTA	RESPUESTA

1 Realiza la tabulación y obtén la gráfica f(x) = x^2.

a

x	f(x) = x^2	f(x)	(x, f(x))
□ 2	(□ 2)^2	4	(□□2, 4)
□ 1	(□ 1)^2	1	(□□1, 1)
0	(0)^2	0	(0, 0)
1	(1)^2	1	(1, 1)
2	(2)^2	4	(2, 4)

b



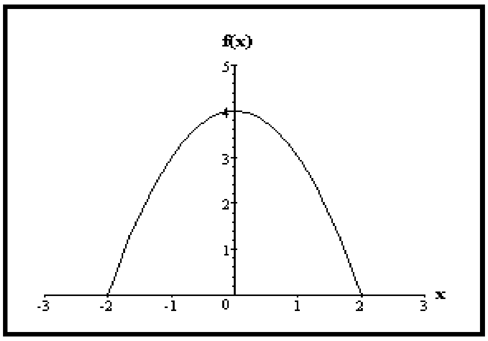
c a= 1, b = 0, c = 0

2 Realiza la tabulación y obtén la gráfica de f(x) = □x^2 + 4.

a

x	f(x) = □ x^2 + 4	f(x)	(x, f(x))
□ 2	□ (□□2)^2 + 4	0	(□□2, 0)
□ 1	□ (□□1)^2 + 4	3	(□□1, 3)
0	□ (0)^2 + 4	4	(0, 4)
1	□ (1)^2 + 4	3	(1, 3)
2	□ (2)^2 + 4	0	(2, 0)

b

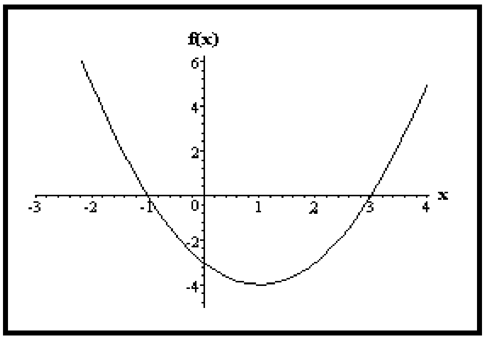


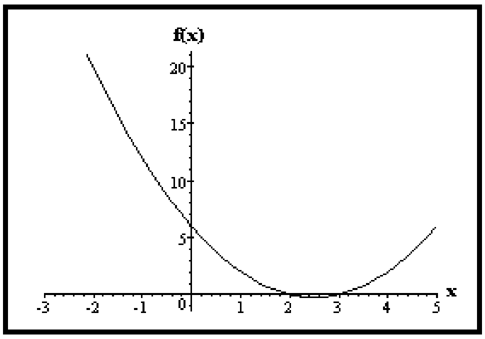
c a = -1, b = 0, c = 4

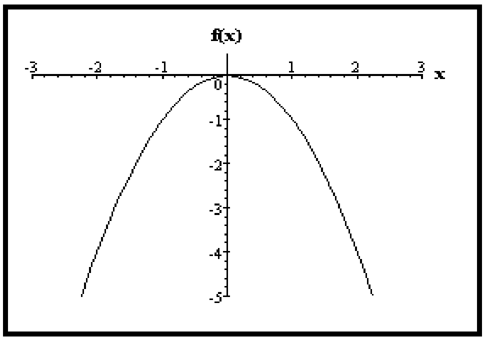
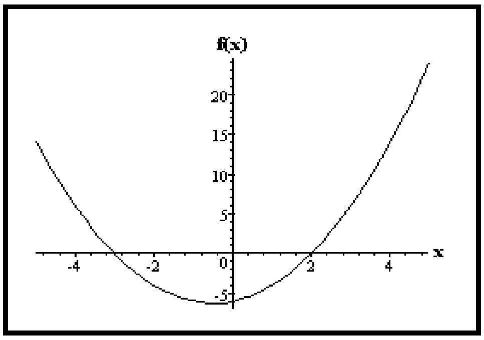
d Se desplaza sobre el eje **y**.

<table>
<tr><th>PREGUNTA</th><th>RESPUESTA</th></tr>
<tr><td>3

a</td><td>Realiza la tabulación y obtén la gráfica de $f(x) = x^2$ □ $2x – 3.$

<table>
<tr><th>x</th><th>$f(x) = x^2$ □ $2x$ □ 3</th><th>f(x)</th><th>(x, f(x))</th></tr>
<tr><td>□ 2</td><td>$(□\ 2)^2$ □ 2(□ 2) □</td><td>5</td><td>(□□2, 5)</td></tr>
<tr><td>□ 1</td><td>$(□\ 1)^2$ 2(□ 1) □ 3</td><td>0</td><td>(□1, 0)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$(0)^2$ □ 2(0) □ 3</td><td>□ 3</td><td>(0, □□3)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$(1)^2$ □ 2(1) □ 3</td><td>□ 4</td><td>(1, □□4)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$(2)^2$ □ 2(2) □ 3</td><td>□ 3</td><td>(2, □□3)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$(3)^2$ □ 2(3) □ 3</td><td>0</td><td>(3, 0)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$(4)^2$ □ 2(4) □ 3</td><td>5</td><td>(4, 5)</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>b</td><td>
</td></tr>
<tr><td>c</td><td>a = 1, b = □□2, c = □□3</td></tr>
<tr><td>d</td><td>Se desplaza hacia la derecha.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$f(x) = x^2$ □ $5x + 6$


</td></tr>
</table>

PREGUNTA	RESPUESTA
5	$f(x) = -x^2$ 
6	$f(x) = x^2 + x - 6$ 
7	(c) $x^2 + 7x + 12 = 0$ (4) (3) factorizando 12 = (4) (3) Esto implica: $(x + 4)(x + 3) = 0$ Por lo tanto, las dos soluciones son: $x + 4 = 0$ $x_1 = -4$ $x + 3 = 0$ $x_2 = -3$

PREGUNTA	RESPUESTA
8	(a) $4x^2 + 2x = 0$ Factorizando **x** tenemos: $x(4x + 2) = 0$ Por lo tanto, las soluciones son: $x_1 = 0$ $4x + 2 = 0$ $4x = -2$ $x = -\frac{2}{4}$ $x_2 = -\frac{1}{2}$
9	(b) $2x^2 + 11x - 21 = 0$ $2x^2 + 14x - 3x - 21 = 0$ $(2x - 3)(x + 7) = 0$ Simplificando: $2x^2 + 11x - 21 = 0$ Por lo tanto, las soluciones son: $2x - 3 = 0$ $2x = 3$ $x_1 = \frac{3}{2}$ $X + 7 = 0$ $X_2 = -7$

PREGUNTA	RESPUESTA
10	(c) $x^2 - 6x - 27 = 0$ $x^2 - 6x + 9 = 27 + 9$ $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2$ Factorizando y simplificando: $x^2 - 6x + 9 = 36$ $\sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt{9} = 3$ $(x-3)^2 = 36$ $\sqrt{(x-3)^2} = \pm\sqrt{36}$ $x - 3 = \pm 6$ Por lo tanto, las soluciones son: $x - 3 = 6$ $x = 6 + 3$ $x_1 = 9$ $x - 3 = -6$ $x = -6 + 3$ $x_2 = -3$
11	(b) $x^2 - 8x - 48 = 0$ $x^2 - 8x + 16 = 48 + 16$ $\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$ Esto implica al factorizar y simplificar: $(x-4)^2 = 64$ $\sqrt{(x-4)^2} = \pm\sqrt{64}$ $x - 4 = \pm 8$ Por lo tanto, las soluciones son: $x - 4 = 8$ $x = 8 + 4$ $x_1 = 12$ $x - 4 = -8$ $x = -8 + 4$ $x_2 = -4$

PREGUNTA	RESPUESTA
12	(a) $4x^2 - 8x - 8 = 0$ Dividiendo entre 4 toda la ecuación: $x^2 - 2x - 2 = 0$ $x^2 - 2x + 1 = 2 + 1$ $(x - 1)^2 = 2 + 1$ $x - 1 = \pm\sqrt{3}$ $\boxed{x = 1 \pm \sqrt{3}}$ $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ $x_2 = 1 - \sqrt{3}$
13	(b) $3x^2 - 7x + 4 = 0$ a b c Aplicando la fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(4)}}{2(3)}$ $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6}$ $x = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6}$ $x = \frac{7 \pm 1}{6}$ Por lo tanto, las dos soluciones son: $x = \frac{7 + 1}{6}$ $x = \frac{8}{6}$ $x_1 = \frac{4}{3}$ $x = \frac{7 - 1}{6}$ $x = \frac{6}{6}$ $x_2 = 1$

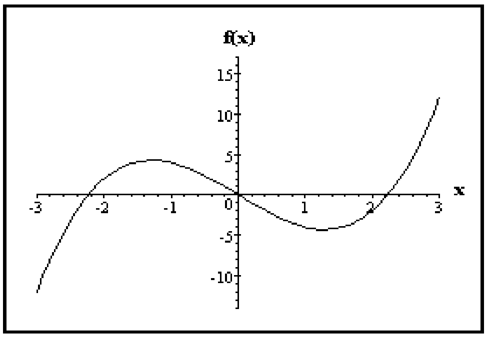
PREGUNTA	RESPUESTA
14	(a) $x^2 - 11x + 24 = 0$ $a = 1$ $b = -11$ $c = 24$ Aplicando la fórmula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \dfrac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(1)(24)}}{2(1)}$ $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2}$ $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{25}}{2}$ $x = \dfrac{11 \pm 5}{2}$ Por lo tanto, las dos soluciones son: $x = \dfrac{11 + 5}{2}$ $x = \dfrac{16}{2}$ $x_1 = 8$ $x = \dfrac{11 - 5}{2}$ $x = \dfrac{6}{2}$ $x_2 = 3$

PREGUNTA	RESPUESTA
15 16 17 18	Es relación porque cruza dos puntos de la parábola. Sí es función porque cruza un punto de la recta. Sí es función porque cruza un punto de la parábola. Sí es función porque cruza un punto de la curva.
19	D
20	B
21	Solución: V Solución: V Solución: V Solución: F
22	

a

x	*f(x) = x³ − 5x*	*f(x)*	*(x, f(x))*
−3	$(-3)^3 - 5(-3)$	−12	(−3, −12)
−2	$(-2)^3 - 5(-2)$	2	(−2, 2)
−1	$(-1)^3 - 5(-1)$	4	(−1, 4)
0	$(0)^3 - 5(0)$	0	(0, 0)
1	$(1)^3 - 5(1)$	−4	(1, −4)
2	$(2)^3 - 5(2)$	−2	(2, −2)
3	$(3)^3 - 5(3)$	12	(3, 12)

b



Unidad 3

Análisis de funciones: ejemplos interesantes

3.1 Análisis de funciones: su generalización

APRENDIZAJES

- Identificar los elementos (dominio, contradominio, imagen y regla de correspondencia) de distintas funciones algebraicas.
- Construir la gráfica de funciones tanto algebraicas como trascendentes.
- Deducir la fórmula de funciones (exponencial y logarítmica) a partir de su gráfica.
- Comparar las funciones continuas y discretas.
- Representar gráficamente funciones discretas.
- Comprender los procesos de iteración y recursividad en funciones discretas.
- Comprender las sucesiones como caso particular de funciones diferentes.

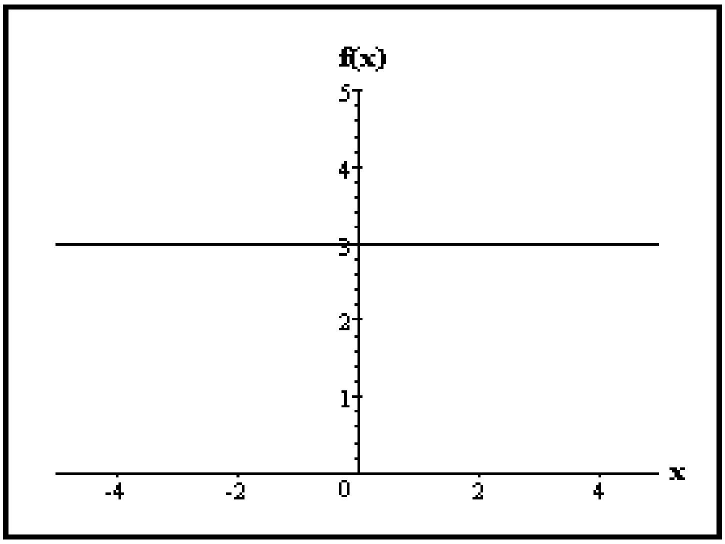
En esta unidad, en su primera parte, se presenta el análisis de los diferentes tipos de funciones, desde la función constante hasta las funciones logarítmica y exponencial.

a) ***Función constante***

Es el conjunto de pares ordenados de la función donde su dominio es un número real y el rango o imagen el valor constante, en este caso el número 3.

x	***f(x) = 3***	***f(x)***	***(x, f(x))***
□3	f(□3) = 3	3	(□3, 3)
□2	f(□2) = 3	3	(□2, 3)
□1	f(□1) = 3	3	(□1, 3)
0	f(0) = 3	3	(0, 3)
1	f(1) = 3	3	(1, 3)
2	f(2) = 3	3	(2, 3)
3	f(3) = 3	3	(3, 3)

La siguiente figura muestra la representación gráfica de una función constante.

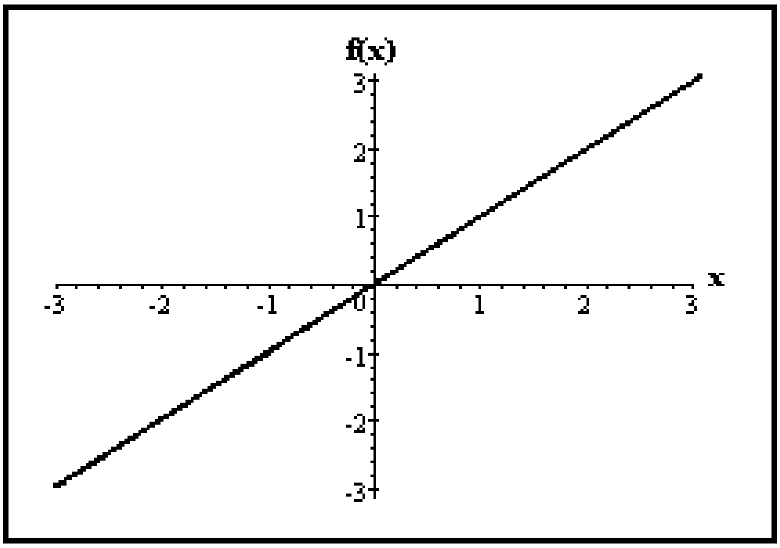


b) ***Función identidad***

Es el conjunto de pares ordenados de la función donde el dominio y el rango o imagen son el mismo número real.

x	*f(x) = x*	*f(x)*	*(x, f(x))*
□3	f(□3) = (□3)	□ 3	(□3,□3)
□2	f(□2) = (□2)	□ 2	(□2, □2)
□1	f(□1) = (□1)	□ 1	(□1, □1)
0	f(0) = (0)	0	(0, 0)
1	f(1) = (1)	1	(1, 1)
2	f(2) = (2)	2	(2, 2)
3	f(3) = (3)	3	(3, 3)

La siguiente figura ilustra la representación gráfica de una función idéntica.

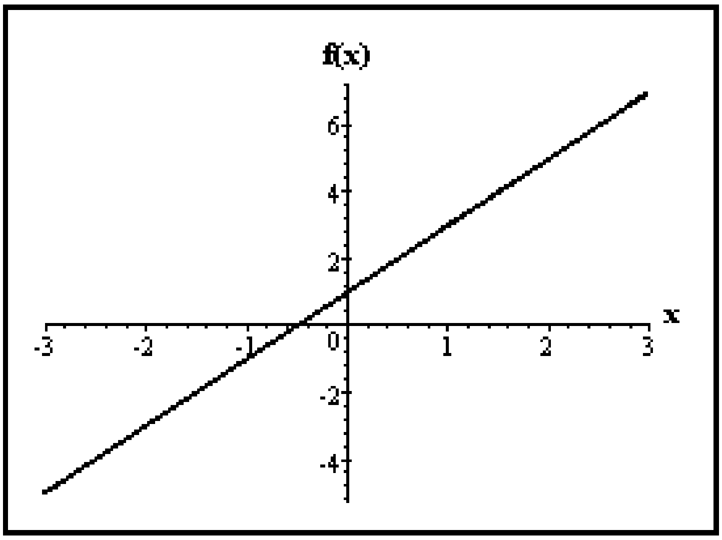


c) ***Función lineal***

Es el conjunto de pares ordenados de la función donde el dominio y el rango o imagen son números reales. La función lineal se conoce también como función de grado uno o primer grado, y gráficamente representa una línea recta.

x	*f(x) = 2x + 1*	*f(x)*	*(x, f(x))*
□3	f(□3) = 2(□3) +1	□5	(□3, □5)
□2	f(□2) = 2(□2) +1	□3	(□2, □3)
□1	f(□1) = 2(□1) +1	□1	(□1, □1)
0	f(0) = 2(0) +1	1	(0, 1)
1	f(1) = 2(1) +1	3	(1, 3)
2	f(2) = 2(2) +1	5	(2, 5)
3	f(3) = 2(3) +1	7	(3, 7)

La siguiente figura muestra la representación gráfica de una función lineal.

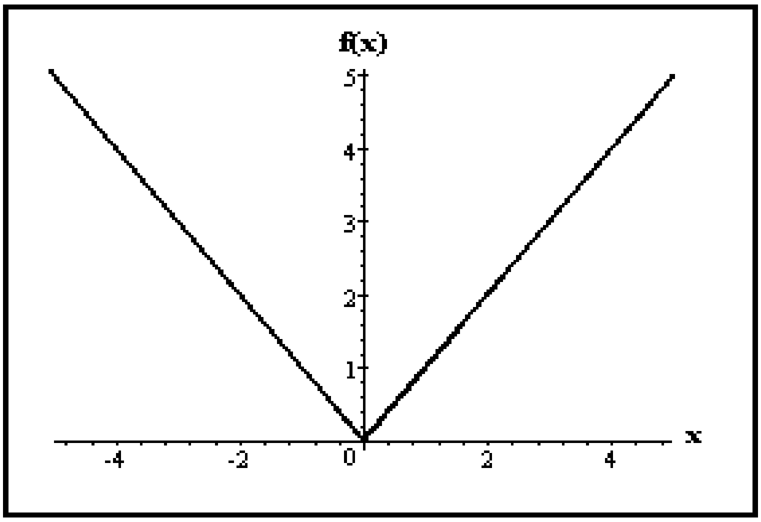


d) ***Función valor absoluto***

Es el conjunto de pares ordenados de la función donde el dominio es un número real y el rango o imagen el valor absoluto de cada elemento del dominio.

x	*f(x) = |x|*	*f(x)*	*(x, f(x))*
□3	f(□3) = |□3|	3	(□3, 3)
□2	f(□2) = |□2|	2	(□2, 2)
□1	f(□1) = |□1|	1	(□1, 1)
0	f(0) = |0|	0	(0, 0)
1	f(1) = |1|	1	(1, 1)
2	f(2) = |2|	2	(2, 2)
3	f(3) = |3|	3	(3, 3)

La siguiente figura ilustra la representación gráfica de una función valor absoluto.

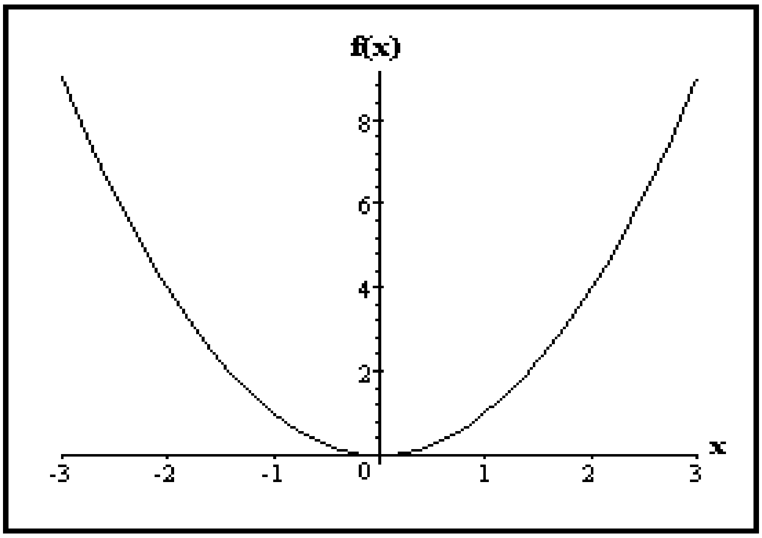


e) ***Función cuadrática***

Es el conjunto de pares ordenados de la función donde su dominio es un número real y el rango o imagen es el cuadrado de cada elemento del dominio. Al representar en el plano cartesiano los pares ordenados se observa que no están alineados como en la función lineal y al unirlos se forma una curva llamada parábola.

x	***f(x) = x²***	***f(x)***	***(x, f(x))***
□3	f(□3) = (□3)^2	9	(□3, 9)
□2	f(□2) = (□2)^2	4	(□2, 4)
□1	f(□1) = (□1)^2	1	(□1, 1)
0	f(0) = (0)^2	0	(0, 0)
1	f(1) = (1)^2	1	(1, 1)
2	f(2) = (2)^2	4	(2, 4)
3	f(3) = (3)^2	9	(3, 9)

La siguiente figura ilustra la representación gráfica de una función cuadrática.

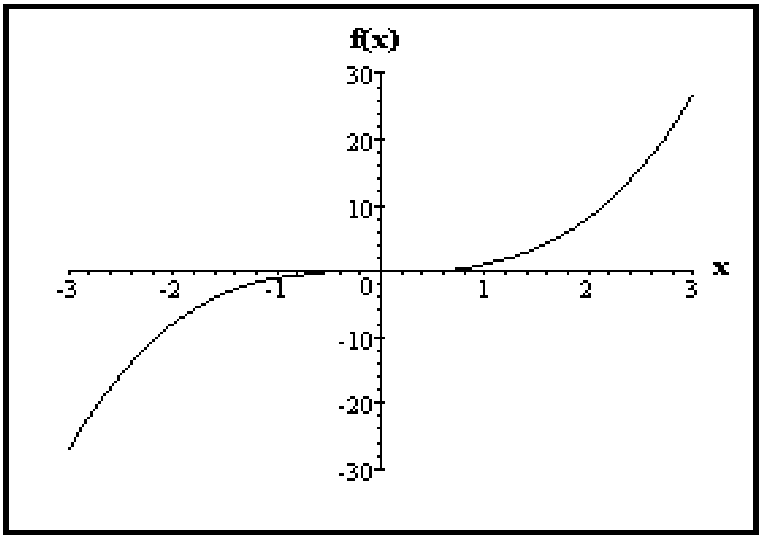


f) ***Función cúbica***

Es el conjunto de pares ordenados de la función donde su dominio es un número real y el rango o imagen el cubo del dominio. Al representar en el plano cartesiano los pares ordenados se observa que no están alineados como en la función lineal, ni forman una parábola como en la función cuadrática, sino que sugieren un trazo curvo como el que se ilustra en la gráfica siguiente.

x	***f(x) = x³***	***f(x)***	***(x, f(x))***
□3	f(□3) = (□3)^3	□ 27	(□3, □27)
□2	f(□2) = (□2)^3	□ 8	(□2, □8)
□1	f(□1) = (□1)^3	□ 1	(□1, □1)
0	f(0) = (0)^3	0	(0, 0)
1	f(1) = (1)^3	1	(1, 1)
2	f(2) = (2)^3	8	(2, 8)
3	f(3) = (3)^3	27	(3, 27)

La siguiente gráfica ilustra el trazo de la función cúbica.



g) ***Función polinomial***

Una función polinomial se define por la expresión:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

donde, **n** es un entero no negativo y $\mathbf{a_n}$ diferente de cero.

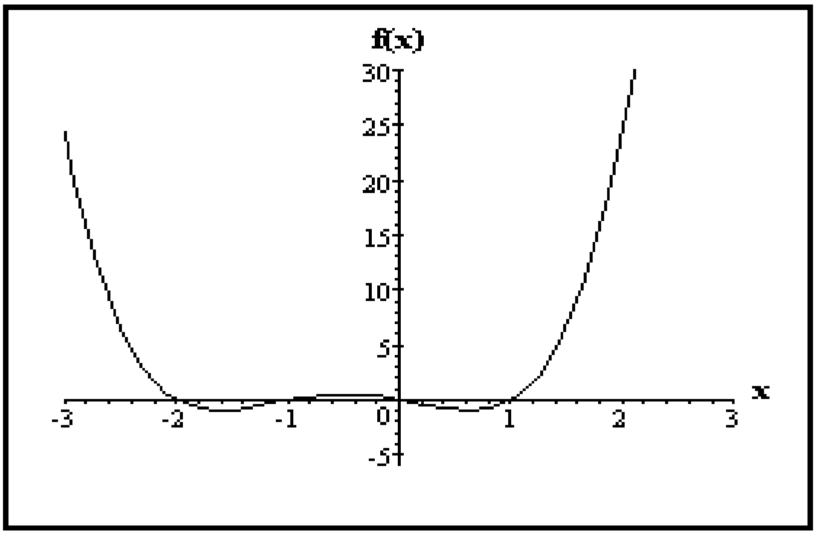
El grado de un término es el del exponente de **x** en dicho término, y el grado de toda la expresión es igual al del término de mayor grado $\mathbf{(x)^n}$.

Por lo anterior, se deduce que las funciones constante, lineal, cuadrática y cúbica son casos especiales de la función polinomial.

La siguiente función polinomial es de grado 4:

x	$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$	*f(x)*	*(x, f(x))*
−3.00	$f(-3) = (-3)^4 + 2(-3)^3 - (-3)^2 - 2(-3)$	24.000	(−3, 24)
−2.00	$f(-2) = (-2)^4 + 2(-2)^3 - (-2)^2 - 2(-2)$	0.000	(−2, 0)
−1.62	$f(-1.62) = (-1.62)^4 + 2(-1.62)^3 - (-1.62)^2 - 2(-1.62)$	−0.999	(−1.62, −0.999)
−1.00	$f(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 - (-1)^2 - 2(-1)$	0.000	(−1, 0)
−0.50	$f(-0.5) = (-0.5)^4 + 2(-0.5)^3 - (-0.5)^2 - 2(-0.5)$	0.562	(−0.5, 0.562)
−0.32	$f(-0.32) = (-0.32)^4 + 2(-0.32)^3 - (-0.32)^2 - 2(-0.32)$	0.482	(−0.32, 0.482)
0.00	$f(0) = (0)^4 + 2(0)^3 - (0)^2 - 2(0)$	0.000	(0, 0)
0.32	$f(0.32) = (0.32)^4 + 2(0.32)^3 - (0.32)^2 - 2(0.32)$	−0.666	(0.32, −0.666)
0.50	$f(0.5) = (0.5)^4 + 2(0.5)^3 - (0.5)^2 - 2(0.5)$	−0.937	(0.5, −0.937)
0.62	$f(0.62) = (0.62)^4 + 2(0.62)^3 - (0.62)^2 - 2(0.62)$	−0.999	(0.62, −0.999)
1.00	$f(1) = (1)^4 + 2(1)^3 - (1)^2 - 2(1)$	0.000	(1, 0)
2.00	$f(2) = (2)^4 + 2(2)^3 - (2)^2 - 2(2)$	24.000	(2, 24)

La siguiente figura muestra la representación gráfica de la función anterior.



El caso de las exponenciales y logarítmicas

Las funciones antes analizadas son funciones algebraicas. Dos funciones no algebraicas, clasificadas como trascendentales que tienen bastante aplicación, son la función exponencial y la función logarítmica, siendo la segunda la inversa de la primera.

La función exponencial se utiliza en el análisis del crecimiento y decaimiento exponencial como: crecimiento de una población, tasa de inflación, tasa de interés compuesta, vida media del carbono 14, etcétera.

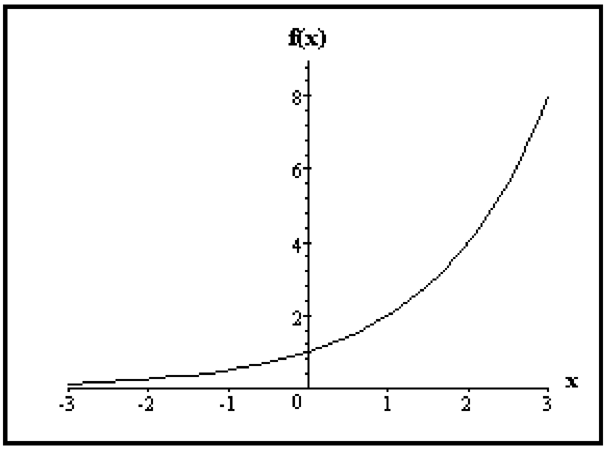
La función logarítmica se aplica en la intensidad de un sonido, para medir la magnitud de un temblor terrestre, la alcalinidad o acidez de cualquier solución, etcétera.

Función exponencial

La función exponencial es una función real no algebraica sino clasificada como trascendental exponencial; la base es siempre un número real positivo diferente de cero.

x	***f(x) = 2^x***	***f(x)***	***(x, f(x))***
□3	$f(\square 3) = (2)^{\square 3} = 1/2^3$	1/8	(□3, 1/8)
□2	$f(\square 2) = (2)^{\square 2} = 1/2^2$	1/4	(□2, 1/4)
□1	$f(\square 1) = (2)^{\square 1} = 1/2$	1/2	(□1, 1/2)
0	$f(0) = (2)^0$	1	**(0, 1)**
1	$f(1) = (2)^1$	2	(1, 2)
2	$f(2) = (2)^2$	4	(2, 4)
3	$f(3) = (2)^3$	8	(3, 8)

En la tabla se observa que a medida que x toma valores negativos cada vez más pequeños la curva se acerca al eje de las abscisas, es decir, x se acerca a cero por la izquierda; sin embargo, la curva nunca toca al eje de las abscisas; ahora bien, si aumenta, entonces 2^x lo hace en la misma forma, de manera que la imagen de la función siempre es un número real positivo.



Función logarítmica

Para comprender la definición de logaritmo, primero recordemos que en una expresión como $2^3 = 8$ al dos se le llama base; al tres exponente y al ocho potencia. El logaritmo de un número ***x*** en base ***c***, es el exponente ***y*** al que se debe elevar la base **c** para que dé el número ***x***, es decir: $c^y = x$ es equivalente a $\log_c x = y$

Haciendo $y = f(x)$ en $f(x) = 2^x$ se tiene que:

$y = 2^x$, o bien,

$2^x = y$ que implica

$\log_2 y = x$

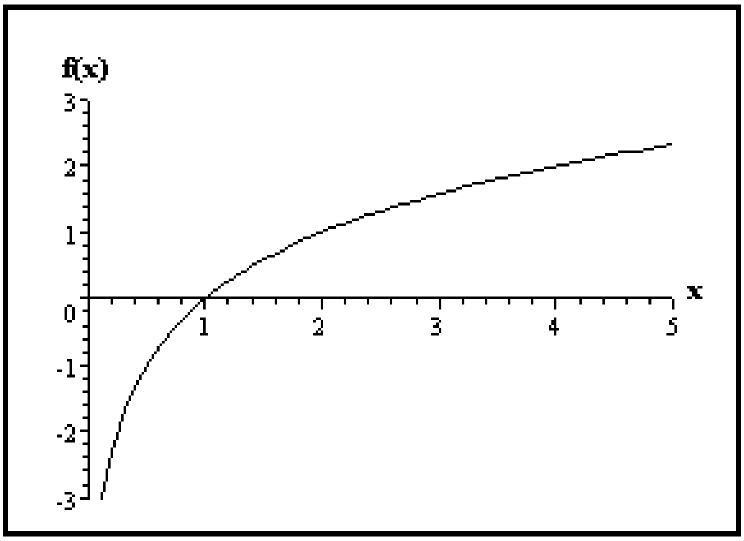
De manera que al sustituir **y** por los valores de la tabla siguiente se tiene:

$\log_2 \frac{1}{8} = x$ implica

$2^x = \frac{1}{8}$; $2^x = \frac{1}{2^3}$; $2^x = 2^{-3}$; por lo tanto,

$x = -3$

f(x)	$\log_2 f(x) = x$	*x*	*(x, f(x))*
1/8	$\log_2 (1/8)$	−3	(1/8, −3)
1/4	$\log_2 (1/4)$	−2	(1/4, −2)
1/2	$\log_2 (1/2)$	−1	(1/2, −1)
1	$\log_2 (1)$	0	(1, 0)
2	$\log_2 (2)$	1	(2, 1)
4	$\log_2 (4)$	2	(4, 2)
8	$\log_2 (8)$	3	(8, 3)



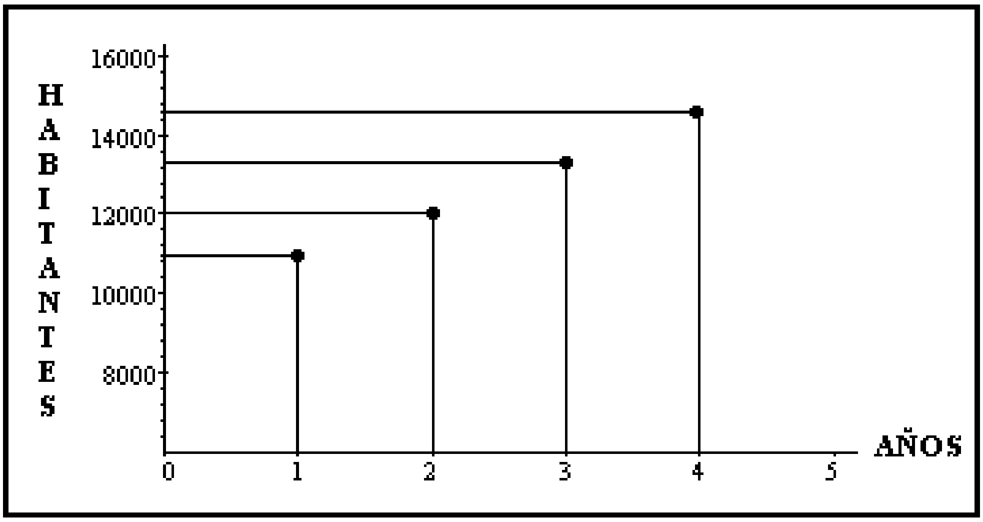
3.2 Función discreta

Una función es discreta si su gráfica en el plano cartesiano representa puntos aislados; por ejemplo, cada punto representa un número de personas y no podemos hablar de fracciones de personas.

En 1980, la Sierra Norte de Puebla tenía 10 mil habitantes y en los censos de 1981, 1982 y 1983 se registró un incremento de 10%. Con estos datos podemos determinar la función de crecimiento de la población, para lo cual representaremos a H_0 = 10,000 habitantes; i = tasa de crecimiento anual, es decir, i = 10% = 0.1, y n = número de años; la función es $f(n) = H_0 (1 + i)^n$

AÑOS	$f(n) = H_0 (1 + i)^n$	(n, f(n))
1980	$f(0) = 10{,}000\,(1+ 0.1)^0 = 10{,}000$	(0; 10,000)
1981	$f(1) = 10{,}000\,(1+ 0.1)^1 = 11{,}000$	(1; 11,000)
1982	$f(2) = 10{,}000\,(1+ 0.1)^2 = 12{,}100$	(2; 12,100)
1983	$f(3) = 10{,}000\,(1+ 0.1)^3 = 13{,}310$	(3; 13,310)
1984	$f(4) = 10{,}000\,(1+ 0.1)^4 = 14{,}641$	(4; 14,641)

Al representar estos puntos en el plano cartesiano se tiene la siguiente gráfica, en la cual sólo se muestran los puntos que representa el número de habitantes con el número de años.



Sucesiones

La sucesión es una lista de objetos, eventos o números que vienen uno después del otro, es decir, una lista de cosas dadas en orden definido. Los meses del año se enumeran en el orden en que ocurren.

Enero, febrero, marzo, ..., diciembre

y 1, 2, 3, ..., 12

Son ejemplos de sucesiones. Cada objeto de la lista se llama *término* de la sucesión. Estos ejemplos son *sucesiones finitas*; la sucesión de meses tiene doce términos y la sucesión numérica tiene diez términos.

Una sucesión como 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... donde no se indica el último término, se conoce como *sucesión infinita*.

Procesos de Iteración y Recursividad

Iteración es el proceso en el que se repite una función retomando el resultado inmediato anterior una y otra vez, hasta aproximarse a un valor determinado. A continuación se muestra un ejemplo donde se realiza la iteración de una función en tres ocasiones.

$$f_1(x) = \sqrt{x}$$
$$f_2(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$$
$$f_3(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$$

El subíndice indica el número de veces que se aplica la función.

Es importante señalar que al graficar los valores obtenidos de la iteración siempre se obtendrá la gráfica de una función discreta.

El proceso de recurrencia o recursividad consiste en generar una sucesión estableciendo la regla mediante la cual se calculará el n-ésimo término de dicha sucesión, siempre y cuando se conozcan el o los términos anteriores de ésta; además al establecer la regla se tiene que estar regresando para verificar los valores de los términos anteriores. A la regla establecida para generar una sucesión se le llama fórmula recurrente o de recurrencia. Para el ejemplo anterior, la fórmula recurrente o de recurrencia es $f(x) = \sqrt{x}$

Sin embargo, el plantear o dar una fórmula de recurrencia no determina la sucesión en forma automática, puesto que los valores iniciales de la sucesión no pueden calcularse con la misma fórmula recurrente.

PROBLEMA

A continuación se desarrollarán los primeros cinco términos de la sucesión definida por:

$$a_n = \frac{n}{n+3} \quad \text{(Fórmula de Recurrencia)}$$

Solución

Si n toma los valores de 1, 2, 3, 4, 5, tenemos:

$$a_1 = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} \qquad a_2 = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5} \qquad a_3 = \frac{3}{3+3} = \frac{3}{6}$$

$$a_4 = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7} \qquad a_5 = \frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$$

Es importante indicar que en el ejemplo anterior no se está aplicando el proceso de iteración, ya que no se aplica la fórmula al resultado inmediato anterior. Ahora veremos este mismo ejercicio aplicando la iteración.

$$a_1 = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} = 0.25 \qquad a_2 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+3} = \frac{1}{13} = 0.0769 \qquad a_3 = \frac{\frac{1}{13}}{\frac{1}{13}+3} = \frac{1}{40} = 0.025$$

$$a_4 = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{40}+3} = \frac{1}{121} = 0.0082 \qquad a_5 = \frac{\frac{1}{121}}{\frac{1}{121}+3} = \frac{1}{364} = 0.0027$$

PROBLEMA A RESOLVER

Resuelve el siguiente problema:

Dada la siguiente fórmula de recurrencia

$$a_n = \frac{n+1}{2n}$$

a) Desarrolla la sucesión cuando $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

b) Aplica el proceso de iteración 4 veces. Inicia con $n = 2$*.

* **NOTA: Para este ejercicio se solicita iniciar la iteración con $n = 2$, ya que al aplicar la regla de recurrencia con $n = 1$ el valor de la sucesión se mantiene constante (1). Cuando el valor de la sucesión se mantiene constante se dice que se tiene un punto fijo.**

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes ejercicios y realiza lo que se solicita.

1. Sea la función $f(x) = |3x-9|$

   a) Realiza la tabulación.

   b) Construye la gráfica.

   c) Indica qué tipo de función es.

2. Dada la función $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

   a) Realiza la tabulación.

b) Construye la gráfica.

c) ¿Qué tipo de función representa?

3. Para la función $f(x) = \square\, x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

a) Realiza la tabulación.

b) Grafica los resultados.

c) Indica qué función representa.

4. Dada la siguiente fórmula de recurrencia

$$a_n = n(n + 1)$$

a) Desarrolla la sucesión cuando $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) Aplica el proceso de iteración 5 veces.

5. Los estudios biológicos sobre un tipo de amiba nociva para la salud descubrieron en ésta las siguientes características:

- Su reproducción es por bipartición, es decir, una se divide en dos, dos se dividen en cuatro, cuatro en ocho, etcétera.
- Se reproduce en periodos de 30 minutos.
- Para su reproducción requiere de un medio de cultivo.

Con esta información contesta lo siguiente:

a) Completa la tabla.

PERIODOS DE 30 MINUTOS	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
REPRODUCCIÓN	1	2					
EQUIVALENTE	2^0	$\mathbf{2^1}$					

b) Grafica tus resultados.

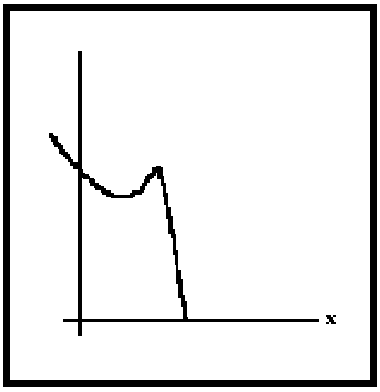
c) ¿Cuál es el modelo matemático que representa al problema?

d) ¿Cuántas amibas habrá después de 5 horas?

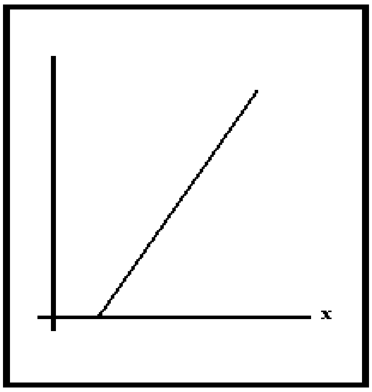
e) ¿Qué tipo de función representa la gráfica anterior?

INSTRUCCIONES: *De acuerdo con las gráficas analizadas, escribe en la línea correspondiente si es una función trascendente o algebraica y el nombre de cada una.*

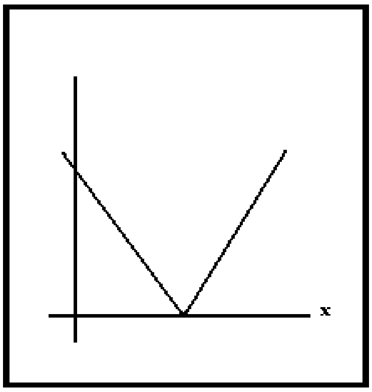
6.



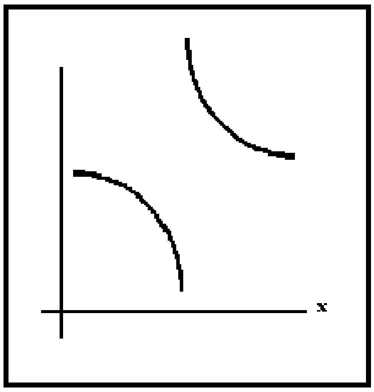
7.



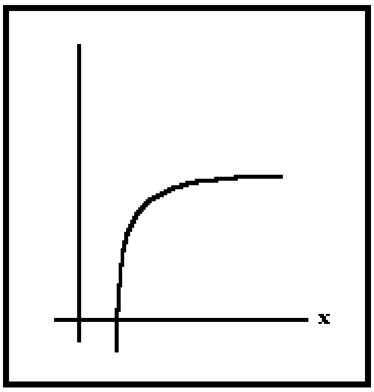
8.



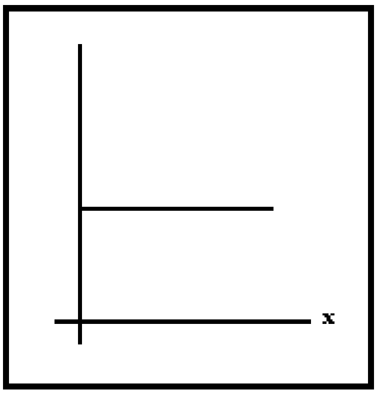
9.



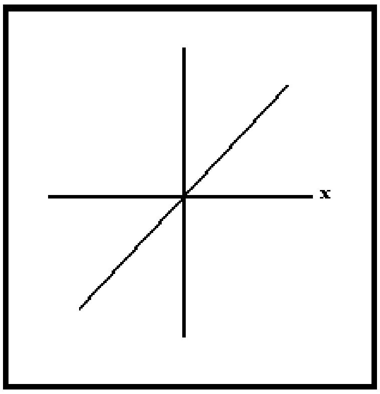
10.



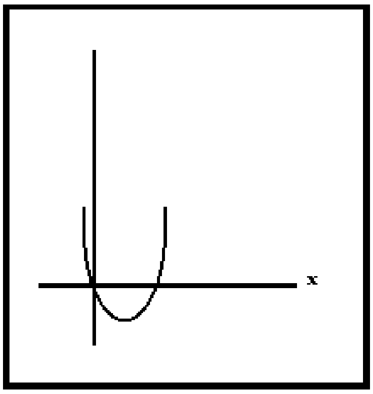
11.



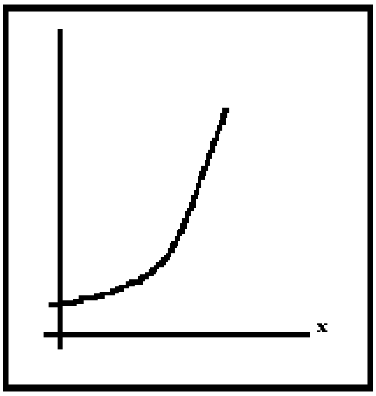
12.



13.



14.



15.

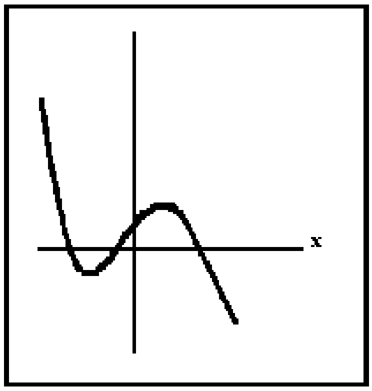
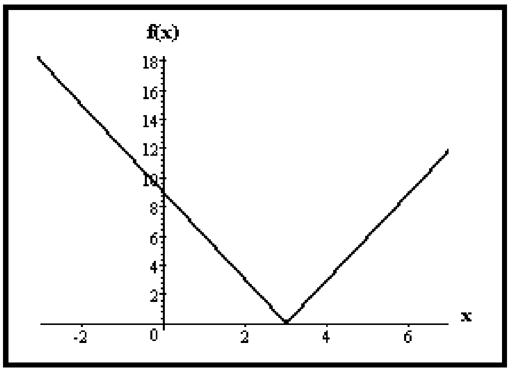


TABLA DE COMPROBACIÓN

PREGUNTA	RESPUESTA
1 a	(tabla a)

x	□2	□1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15	12	9	6	3	0	3	6	9

b

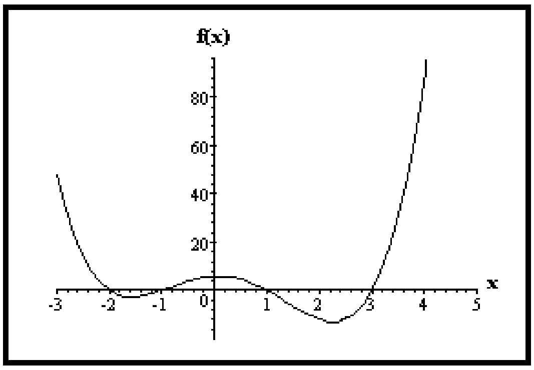


c Función: valor absoluto

2 a

x	$f(x) = x^4 \square x^3 \square\square 7x^2 + x + 6$	f (x)	(x, f (x))
□3	$f(\square 3) = (\square 3)^4 \square (\square 3)^3 \square\square 7(\square 3)^2 + (\square 3) + 6$	48	(□3, 48)
□2	$f(\square 2) = (\square 2)^4 \square (\square 2)^3 \square\square 7(\square 2)^2 + (\square 2) + 6$	0	(□2, 0)
□1.5	$f(\square 1.5) = (\square 1.5)^4 \square (\square 1.5)^3 \square\square 7(\square 1.5)^2 + (\square 1.5) + 6$	□2.8	(□1.5, □2.8)
□1	$f(\square 1) = (\square 1)^4 \square (\square 1)^3 \square\square 7(\square 1)^2 + (\square 1) + 6$	0	(□1, 0)
0	$f(0) = (0)^4 \square (0)^3 \square\square 7(0)^2 + (0) + 6$	6	(0, 6)
0.5	$f(0.5) = (0.5)^4 \square (0.5)^3 \square\square 7(0.5)^2 + (0.5) + 6$	4.1	(0.5, 4.1)
1	$f(1) = (1)^4 \square (1)^3 \square\square 7(1)^2 + (1) + 6$	0	(1, 0)
2	$f(2) = (2)^4 \square (2)^3 \square\square 7(2)^2 + (2) + 6$	□12	(2, □12)
3	$f(3) = (3)^4 \square (3)^3 \square\square 7(3)^2 + (3) + 6$	0	(3, 0)
4	$f(4) = (4)^4 \square (4)^3 \square\square 7(4)^2 + (4) + 6$	90	(4, 90)

b



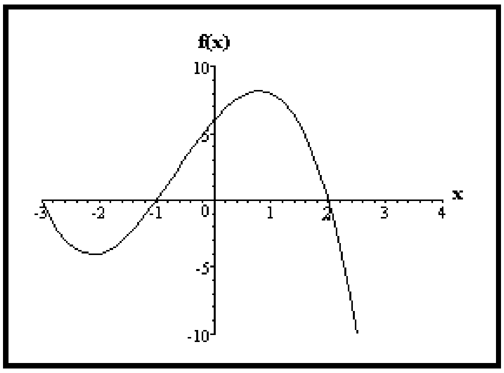
c Función: polinomial

PREGUNTA	RESPUESTA
3	

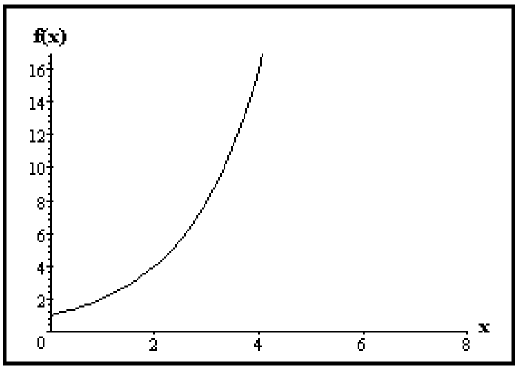
a

x	$f(x) = \square\, x^3 - 2x^2 + 5x + 6$	f (x)	(x, f(x))
□3	$f(\square 3) = \square\,(\square 3)^3 - 2(\square 3)^2 + 5(\square 3) + 6$	0	(□3, 0)
□2	$f(\square 2) = \square\,(\square 2)^3 - 2(\square 2)^2 + 5(\square 2) + 6$	□4	(□2, □4)
□1.5	$f(\square 1.5) = \square\,(\square 1.5)^3 - 2(\square 1.5)^2 + 5(\square 1.5) + 6$	□2.6	(□1.5, □2.6)
□1	$f(\square 1) = \square\,(\square 1)^3 - 2(\square 1)^2 + 5(\square 1) + 6$	0	(□1, 0)
□0.5	$f(\square 0.5) = \square\,(\square 0.5)^3 - 2(\square 0.5)^2 + 5(\square 0.5) + 6$	3.1	(□0.5, 3.1)
0	$f(0) = \square\,(0)^3 - 2(0)^2 + 5(0) + 6$	6	(0, 6)
1	$f(1) = \square\,(1)^3 - 2(1)^2 + 5(1) + 6$	8	(1, 8)
1.5	$f(1.5) = \square\,(1.5)^3 - 2(1.5)^2 + 5(1.5) + 6$	5.6	(1.5, 5.6)
2	$f(2) = \square\,(2)^3 - 2(2)^2 + 5(2) + 6$	0	(2, 0)
3	$f(3) = \square\,(3)^3 - 2(3)^2 + 5(3) + 6$	□2.4	(3, □2.4)
4	$f(4) = \square\,(4)^3 - 2(4)^2 + 5(4) + 6$	□70	(4, □70)

b



c Función: cúbica

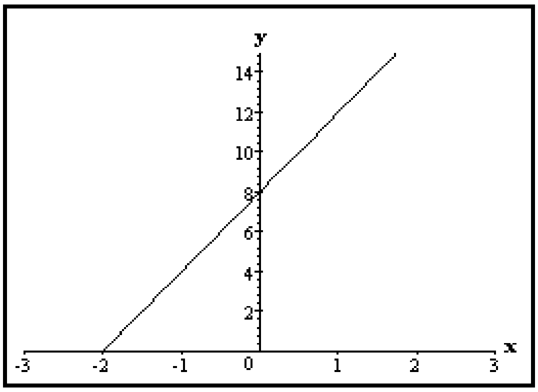
PREGUNTA	RESPUESTA	FUNDAMENTACIÓN
4 a b	$a_1 = 1\ (1 + 1) = 1(2) = 2$ $a_2 = 2\ (2 + 1) = 2(3) = 6$ $a_3 = 3\ (3 + 1) = 3(4) = 12$ $a_4 = 4\ (4 + 1) = 4(5) = 20$ $a_5 = 5\ (5 + 1) = 5(6) = 30$ $a_1 = 1(1 + 1) = 1(2) = 2$ $a_2 = 2(2 + 1) = 2(3) = 6$ $a_3 = 6(6 + 1) = 6(7) = 42$ $a_4 = 42(42 + 1) = 42(43) = 1806$ $a_5 = 1806(51806 + 1) = 1806(1807) = 3263442$	Los primeros cinco términos se calculan tomando los valores n = 1, 2, 3, 4 y 5; se sustituyen en la fórmula.
5 a	<table><tr><th>PERIODOS DE 30 MINUTOS</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th></tr><tr><td>REPRODUCCIÓN</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>32</td><td>64</td><td>128</td></tr><tr><td>EQUIVALENTE</td><td>2^0</td><td>$\mathbf{2^1}$</td><td>2^2</td><td>2^3</td><td>2^4</td><td>2^5</td><td>2^6</td><td>2^7</td></tr></table>	
b		
c	$f(x) = 2^x$	
d	En 5 horas habrán transcurrido 10 periodos. $f(10) = 2^{10} = 1024$ amibas.	$f\ (x) = 2^{10}$
e	Función exponencial.	
6	Algebraica ninguna	
7	Algebraica lineal	

PREGUNTA	RESPUESTA	FUNDAMENTACIÓN
8	Algebraica valor absoluto	
9	Algebraica racional	
10	Trascendental logarítmica	
11	Algebraica constante	
12	Algebraica identidad o idéntica	
13	Algebraica cuadrática	
14	Trascendental exponencial	
15	Algebraica cúbica	

E J E R C I C I O S   D E   A U T O E V A L U A C I Ó N

INSTRUCCIONES: lee con atención cada uno de los siguientes reactivos y anota en el paréntesis de la izquierda la letra de la opción correcta. Para resolver los ejercicios ***cuentas con 60 minutos.***

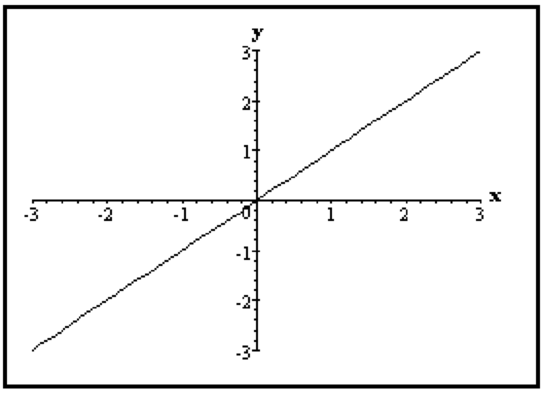
1. (   ) Analiza la siguiente gráfica.



¿Cuál es su función?

a) f(x) = 4x □ 8
b) f(x) = □ 4x □ 8
c) f(x) = 4x
d) f(x) = 4x + 8

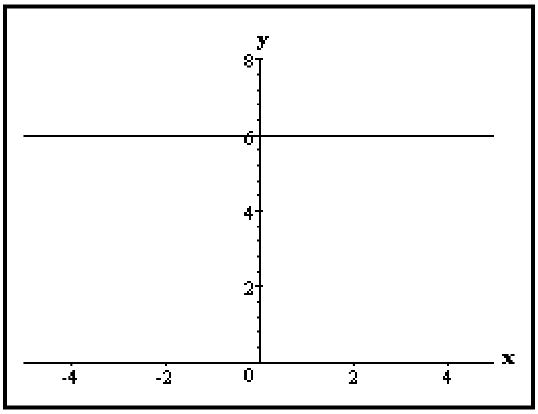
2. (   ) Analiza la gráfica.



¿Cuál función le corresponde?

a) f(x) = □ 2x
b) f(x) = x
c) f(x) = □ 2x + 1
d) f(x) = 2x

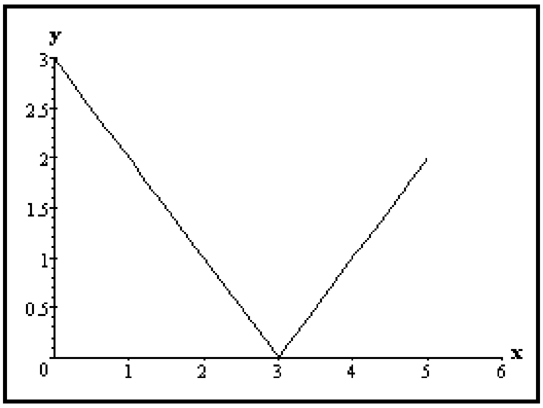
3. ( ) Dada la siguiente gráfica



¿Cuál es la función que le corresponde?

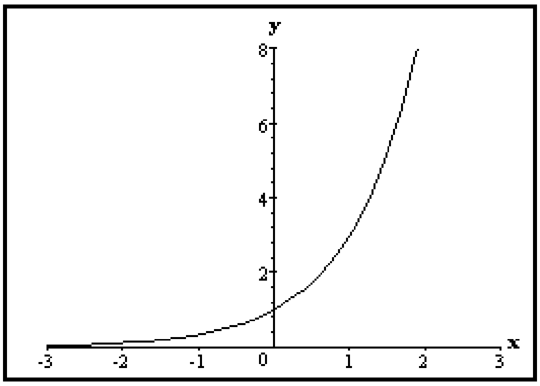
a) f(x) = x + 6
b) f(x) = □ x □ 6
c) f(x) = 6
d) f(x) = □ 6

4. ( ) La función de la siguiente gráfica es…



a) f(x) = |x + 3|
b) f(x) = |□ x □ 3|
c) f(x) = |3x|
d) f(x) = |x □ 3|

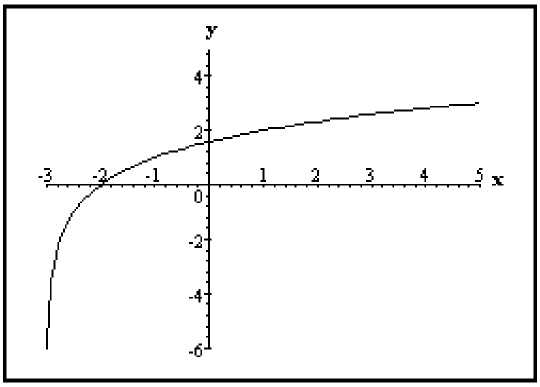
5. ( ) Analiza la gráfica



¿Cuál es su función?

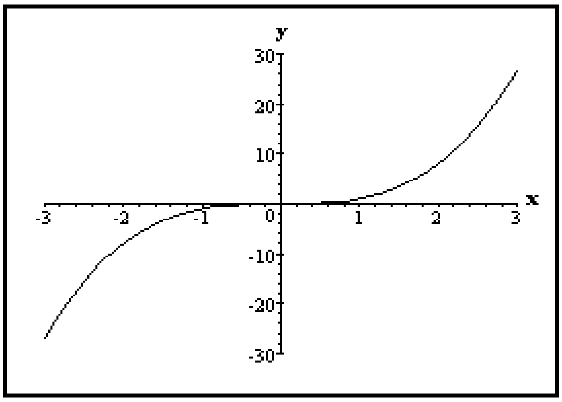
a) $f(x) = x + 3$
b) $f(x) = x^3$
c) $f(x) = 3^x$
d) $f(x) = 3x$

6. ( ) Dada la gráfica siguiente, indica la función que le corresponde.



a) $f(x) = \log_2 (x + 3)$
b) $f(x) = \log_3 (x + 2)$
c) $f(x) = \log_2 (x + 3)^x$
d) $f(x) = \log_2 x$

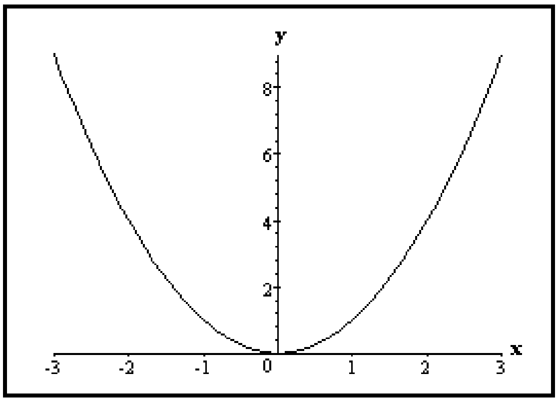
7. ( ) Analiza la gráfica.



La función que le corresponde es…

a) $f(x) = x^2 + 3$
b) $f(x) = x^3$
c) $f(x) = 3^x$
d) $f(x) = 3x + 2$

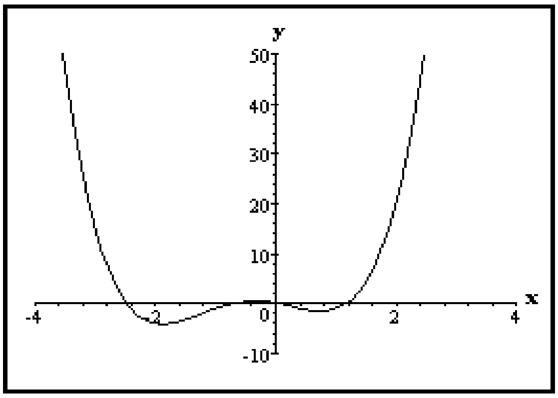
8. ( ) Dada la gráfica.



¿Cuál es su función?

a) $f(x) = x^2 + 3$
b) $f(x) = x^3$
c) $f(x) = x^2$
d) $f(x) = x + 2$

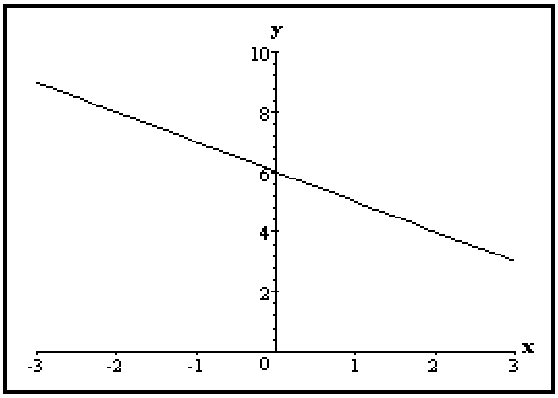
9. ( ) Analiza la siguiente gráfica.



¿Qué función le corresponde?

a) $f(x) = x^2 + 3$
b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$
c) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2$
d) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x$

10. ( ) Dada la gráfica.



Su función es:

a) $f(x) = -x + 6$
b) $f(x) = x + 6$
c) $f(x) = -x - 6$
d) $f(x) = 6x$

INSTRUCCIONES: Lee con atención el siguiente reactivo y realiza lo que se solicita.

11. Escribe el nombre de cada una de las funciones anteriores.

12. Dada la siguiente fórmula de recurrencia

$$a_n = 2^n$$

a) Desarrolla la sucesión cuando $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) Aplica el proceso de iteración 4 veces.

13. Dada la siguiente fórmula de recurrencia

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

a) Desarrolla la sucesión cuando $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) Aplica el proceso de iteración 4 veces. Inicia con $n = 2$.

INSTRUCCIONES: Desarrolla los primeros cinco términos de la sucesión definida en cada reactivo.

14. $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

15. $a_n = \dfrac{(-2)^n}{n^2}$

16. $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$

17. $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

CLAVE DE RESPUESTA

PREGUNTA	RESPUESTA
1	inciso d
2	inciso b
3	inciso c
4	inciso d
5	inciso c
6	inciso a
7	inciso b
8	inciso c
9	inciso d
10	inciso a
11	Función lineal Función idéntica Función constante Función valor absoluto Función exponencial Función logarítmica Función cúbica Función cuadrática Función de cuarto grado Función lineal
12 **a**	$a_1 = 2^1 = 2$ $a_2 = 2^2 = 4$ $a_3 = 2^3 = 8$ $a_4 = 2^4 = 16$ $a_5 = 2^5 = 32$
b	$a_1 = 2^1 = 2$ $a_2 = 2^2 = 4$ $a_3 = 2^4 = 16$ $a_4 = 2^{16} = 131072$

PREGUNTA	RESPUESTA
13 A	$a_1=\frac{1}{1^2}=\frac{1}{1}=1$ $a_2=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ $a_3=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$ $a_4=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$ $a_5=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$
b	$a_1=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ $a_2=\frac{1}{\frac{1}{4}^2}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16$ $a_3=\frac{1}{16^2}=\frac{1}{256}$ $a_4=\frac{1}{\left(\frac{1}{256}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{65536}}=65536$
14	$a_1=\frac{(-1)^1(1)}{1+1}=\frac{(-1)}{2}=-\frac{1}{2}$ $a_2=\frac{(-1)^2(2)}{2+1}=\frac{(1)(2)}{3}=\frac{2}{3}$ $a_3=\frac{(-1)^3(1)}{3+1}=\frac{(-1)(3)}{4}=-\frac{3}{4}$ $a_4=\frac{(-1)^4(1)}{4+1}=\frac{(1)(4)}{5}=\frac{4}{5}$ $a_5=\frac{(-1)^5(1)}{5+1}=\frac{(-1)(5)}{6}=-\frac{5}{6}$

PREGUNTA	RESPUESTA
15	$a_1=\frac{(-2)^1}{1^2}=\frac{(-2)}{1}=-2$ $a_2=\frac{(-2)^2}{2^2}=\frac{4}{4}=1$ $a_3=\frac{(-2)^3}{3^2}=\frac{(-8)}{9}=-\frac{8}{9}$ $a_4=\frac{(-2)^4}{4^2}=\frac{16}{16}=1$ $a_5=\frac{(-2)^5}{5^2}=\frac{(-32)}{25}=-\frac{32}{25}$
16	$a_1=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ $a_2=\frac{1}{2^2+1}=\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}$ $a_3=\frac{1}{3^2+1}=\frac{1}{9+1}=\frac{1}{10}$ $a_4=\frac{1}{4^2+1}=\frac{1}{16+1}=\frac{1}{17}$ $a_5=\frac{1}{5^2+1}=\frac{1}{25+1}=\frac{1}{26}$
17	$a_1=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$ $a_2=\frac{2+1}{2+2}=\frac{3}{4}$ $a_3=\frac{3+1}{3+2}=\frac{4}{5}$ $a_4=\frac{4+1}{4+2}=\frac{5}{6}$ $a_5=\frac{5+1}{5+2}=\frac{6}{7}$

BIBLIOGRAFÍA

BRITTON, JACK T., IGNACIO BELLO: *Álgebra y Trigonometría Contemporáneas*. Harla, México, 1982.

GOBRAN, ALFONSE: *Álgebra elemental*. Iberoamérica, México, 1990.

PHILLIPS, ELIZABETH P., THOMAS BUTTS, MICHAEL SHAUGHNESSY: *Álgebra con Aplicaciones.* Harla, México, 1983.

SCHOOLS COUNCIL SIATH FORM MATEMATICS PROYECT: *Modelos polinomiales, Unidad de los estudiantes*. CECSA, México, 1985.

SWOKOWSKI, EARL W.: *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Iberoamérica, México, 1986.

SUGERENCIAS PARA PRESENTAR EXÁMENES DE RECUPERACIÓN O ACREDITACIÓN ESPECIAL

Para evitar cualquier contratiempo al presentar el examen de recuperación o acreditación especial considera las siguientes recomendaciones:

Organización:

- Acude al menos con 10 minutos de anticipación al salón indicado. Debes presentarle esta Guía resuelta al profesor aplicador.
- Lleva el comprobante de inscripción al examen y tu credencial actualizada.
- Lleva dos lápices del Núm. 2 o 2 ½.
- No olvides una goma que no manche.

Durante el examen:

- Lee con atención tanto las instrucciones como las preguntas y si tienes alguna duda consúltala con el aplicador.
- Contesta primero las preguntas que te parezcan “fáciles” y después concentra toda tu atención en las “difíciles”.
- Si te solicitan explicar o desarrollar algún tema, identifica las ideas principales que quieras exponer y escríbelas de la manera más correcta y clara que puedas, evita el planteamiento de ideas innecesarias.
- Escribe tus respuestas con letra clara, legible y sin faltas de ortografía.
- Al terminar de contestar el examen, revísalo nuevamente para asegurarte que todas las preguntas estén contestadas.
- Centra tu atención en el examen, no trates de copiar, recuerda que el compañero de junto puede estar equivocado.

La Guía para presentar exámenes de
Recuperación o Acreditación especial de
Matemáticas II
se terminó de reimprimir en el mes de octubre de 2006
en los talleres de la Impresora y Encuadernadora Progreso, S.A. de C.V.
Calz. San Lorenzo Tezonco núm. 244, Col. Paraje San Juan
Delegación Iztapalapa, C.P. 09830

El tiraje fue de 1,100 ejemplares
más sobrantes para reposición