“Un proceso pertinente de formación para la vida”

COLEGIO DE BACHILLERES

Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial (Apoya a Plan 92)

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Guía para presentar exámenes de
Recuperación o Acreditación Especial.

Cálculo diferencial e integral I.
(Versión preliminar)

Esta guía fue elaborada por la **Secretaría Académica,** a través de la **Dirección de Planeación Académica**.

Colaborador

Profr. Alejandro Rosas Snell.

Colegio de Bachilleres, México
www. cbachilleres.edu.mx
Rancho Vista Hermosa No. 105
Ex-Hacienda Coapa,
04920, México, D.F.

La presente obra fue editada en el procesador de palabras Word 2002 (Office xp).

Word 2002 es marca registrada de Microsoft Corp.

Este material se utiliza en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Colegio de Bachilleres, institución pública de educación media superior del Sistema Educativo Nacional.

JUNIO 2002

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

La evaluación de recuperación y la de acreditación especial son oportunidades extraordinarias que debes aprovechar para aprobar las asignaturas que, por diversas razones, reprobaste en el curso normal; pero ¡cuidado!, presentarte a un examen sin la preparación suficiente significa un fracaso seguro, es una pérdida de tiempo y un acto irresponsable que puedes evitar.

¿Cómo aumentar tu probabilidad de éxito en el examen mediante la utilización de esta guía? La respuesta es simple, observa las siguientes reglas:

- Convéncete de que tienes la capacidad necesaria para acreditar la asignatura. Recuerda que fuiste capaz de ingresar al Colegio de Bachilleres mediante un examen de selección.

- Sigue al *pie de la letra* las instrucciones de la guía.

- Procura dedicarte al estudio de este material, *al menos durante 15 días, tres horas diarias continuas.*

- Contesta toda la guía: es un requisito que la presentes resuelta y en limpio al profesor aplicador antes del examen correspondiente.

PRÓLOGO

En el marco del programa de desarrollo institucional 2001 y 2006, el estudiante adquiere una especial relevancia, por lo que el Colegio de Bachilleres metropolitano se ha avocado a la elaboración de diversos materiales didácticos que apoyen al estudiante en diversos momentos del proceso de enseñanza aprendizaje.

Uno de los materiales elaborados son las guías de estudio, las cuales tienen como propósito apoyar a los estudiantes que deben presentar exámenes de recuperación o acreditación especial favoreciendo sus probabilidades de éxito.

En este contexto, la guía para presentar exámenes de recuperación y acreditación especial de Cálculo Diferencial e Integral I se ha elaborado con el propósito de que los estudiantes que se encuentran en situación académica irregular y que tienen necesidad de presentar exámenes en periodos extraordinarios para acreditar la asignatura cuenten con este material para llevar a cabo su preparación y, así, contar con más elementos para incrementar sus posibilidades de éxito.

Esta guía aborda en forma integral y sintética las principales temáticas establecidas en el programa de estudio; las actividades y ejercicios que se plantean son un apoyo para que el estudiante recupere los conocimientos previos, los relacione con otros más complejos y, en su caso, los aplique en el desarrollo de procedimientos y modelos matemáticos propios del cálculo. Esto permitirá que, con el estudio de la guía, continúe desarrollando y ejercitando sus habilidades de análisis y razonamiento matemático. Al final del desarrollo de las unidades la guía contiene una autoevaluación sobre los elementos esenciales de toda la unidad, para que el alumno verifique su grado de comprensión y dominio. Asimismo se incluyen algunas sugerencias para reforzar el apoyo sobre los aspectos estratégicos del tema.

En la primera unidad, ***RAZÓN DE CAMBIO,*** se aborda de manera gráfica y algebraica la representación de funciones, la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea, así como el planteamiento de problemas en los cuales se aplican y verifican los procedimientos y modelos matemáticos estudiados en el planteamiento de la solución.

En la segunda unidad, ***LA FUNCIÓN DERIVADA***, se abordan los conceptos de derivada, límite y continuidad de una función, también de manera gráfica y algebraica. En particular, dada su importancia, se revisan diferentes métodos, técnicas y reglas para derivar funciones, pues son indispensables en la identificación y aplicación del procedimiento adecuado según el problema que se quiera solucionar.

Por último se proporciona una bibliografía básica en la que se pueden consultar los temas desarrollados en la guía.

En síntesis, la guía para presentar exámenes de recuperación y acreditación especial constituye un material didáctico producto del esfuerzo académico orientado a fortalecer los niveles de aprovechamiento y acreditación de los estudiantes.

UNIDAD 1

RAZÓN DE CAMBIO

1.1 RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO

Aprendizajes
• Calcular numéricamente la razón de cambio promedio. • Interpretar gráficamente la razón de cambio promedio.

Recuerda que el **incremento** de una variable que pasa de un valor numérico a otro **es la diferencia que se obtiene restando el valor inicial del valor final.**

Un incremento de x se representa por Δx, que se lee **delta *x***. Es evidente que el incremento puede ser positivo o negativo (decremento), según la variable aumente o disminuya al cambiar de valor.

Si en $y = f(x)$ (regla de correspondencia de una función) la variable independiente x toma un incremento Δx, entonces Δy indicará un incremento de $f(x)$, o sea, de la variable dependiente *y.*

El incremento Δy siempre ha de contarse desde el valor inicial definido en *y,* que corresponde al valor inicial arbitrariamente fijado para *x,* desde el cual se cuenta el incremento Δx.

El siguiente ejemplo muestra cómo los intervalos que se seleccionan deben ser cada vez más pequeños **para calcular la razón de cambio promedio**, que ya has estudiado como la pendiente de una línea recta conocidos dos de sus puntos.

Si se lanza un objeto que caerá a una distancia de $16t^2$ pies en *t* segundos. ¿cuál será la velocidad al cabo de tres segundos?

En Física se define la velocidad promedio de un objeto en movimiento sobre un intervalo de tiempo como **el cociente de la distancia recorrida, dividida por el tiempo transcurrido:**

$$v = \frac{S}{t}$$

donde: ***S*** es el desplazamiento o distancia.

t es el tiempo.

La solución de este ejemplo la enfocaremos calculando la velocidad promedio sobre intervalos de tiempo más y más pequeños, intervalos que comienzan en el instante de tiempo que nos interesa.

Para nuestro caso, el tiempo será de 3 segundos; entonces, el objeto ha caído a una distancia de 144 pies ($16(3)^2 = 144$); para cuando $t = 4$ segundos, el objeto ha caído a una distancia de 256 pies ($16(4)^2 = 256$).

Con los cálculos anteriores, podemos observar que en el intervalo de un segundo, iniciando en $t = 3$ segundos y finalizando en $t = 4$ segundos, el objeto cae una distancia de 256 – 144 = 112 pies; así, su velocidad promedio en el intervalo de un segundo es de 112 pies/segundo. Con base en lo anterior, procedamos análogamente para encontrar las velocidades promedio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, iniciando en el instante de tres segundos, como se muestra a continuación:

Tiempo (segundos)	Distancia (pies)	Velocidad promedio (pies/segundo)
3 4	144 256	$\frac{256-144}{4-3}=112$
3 3.5	144 196	$\frac{196-144}{3.5-3}=104$
3 3.1	144 153.76	$\frac{153.76-144}{3.1-3}=97.6$
3 3.01	144 144.9616	$\frac{144.9616-144}{3.01-3}=96.16$
3 3.001	144 144.096016	$\frac{144.096016-144}{3.001-3}=96.016$

Así, las velocidades anteriores son aproximaciones a la velocidad del objeto en el instante t = 3 segundos.

Recuerda que la función $f(x) = mx + b$ ó $y = mx + b$ donde ***m*** y ***b*** son números reales fijos, se llama **función lineal.** Su gráfica es una recta no vertical y solemos decir que la función es una recta ó viceversa.

Si dos puntos cualesquiera distintos, digamos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están en o pertenecen a la recta $f(x) = mx + b$, entonces tenemos para estos puntos:

$$f(x_1) = mx_1 + b \quad \text{y} \quad f(x_2) = mx_2 + b$$

Pero si utilizamos la regla de correspondencia de una función $(y = f(x))$ tenemos que:

$$y_1 = mx_1 + b \quad y \quad y_2 = mx_2 + b$$

si restamos la primera expresión de la segunda expresión, obtenemos:

$$\begin{array}{r} y_2 = mx_2 + b \\ -\quad y_1 = mx_1 + b \\ \hline y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1 \end{array}$$

factorizando se obtiene $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

$$\therefore\ m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Donde: ***m*** es la razón de cambio de la cantidad ***y*** respecto a la cantidad ***x***, y mide lo inclinado de la recta, por lo que se le denomina **pendiente de la línea recta**.

Como la razón de cambio promedio es un cociente de incrementos $(\Delta y / \Delta x)$ y cada incremento **es la diferencia de restar el valor inicial del valor final**, podemos concluir que:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ es la razón de cambio promedio.

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

De la función $f(x) = x^2 - x + 1$ vamos a calcular la pendiente de la curva en el punto $x = 4$.

Si tomamos $P_1(4, 13)$ de la curva, entonces enfocamos el problema hallando las pendientes de las rectas que se llaman secantes, que pasan por P y otro punto de la curva que elegimos más y más próximo a P. Por ejemplo, cuando *x* toma los siguientes valores:

Si $x = 5$, $f(5) = 25 - 5 + 1 = 21$, $\therefore$ $P_2(5, 21)$, calculamos la pendiente tomando los puntos P_1 y P_2, Tendremos que:

$$m = \frac{21-13}{5-4} = 8$$

A continuación realizaremos cuatro aproximaciones sucesivas, tomando para cada una el punto P_1.

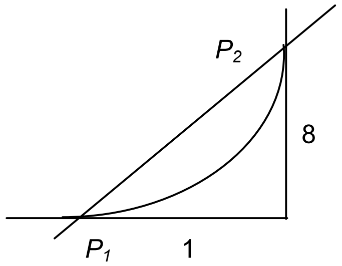
Si $x = 4.1$, $f(4.1) = 13.71$, $\therefore$ $P_2(4.1, 13.71)$.

Si $x = 4.01$, $f(4.01) = 13.0701$, $\therefore$ $P_2(4.01, 13.0701)$.

Si $x = 4.001$, $f(4.001) = 13.007001$, $\therefore$ $P_2(4.001, 13.007001)$.

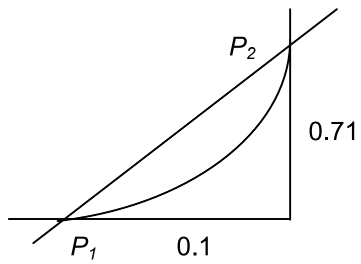
Ahora graficaremos las pendientes de cada uno de los pares de puntos que hemos calculado, determinando la pendiente de éstos:

Para $P_1(4, 13)$ y $P_2(5, 21)$;



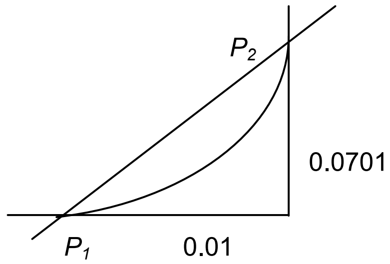
$$m_{P_1P_2} = \frac{21-13}{5-4} = 8$$

Para $P_1(4, 13)$ y $P_2(4.1, 13.71)$



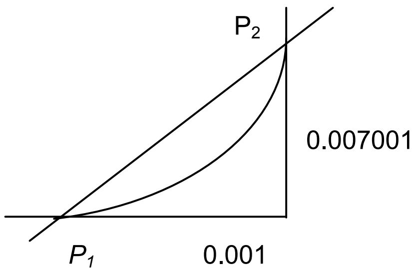
$$m_{P_1P_2} = \frac{13.71-13}{4.1-4} = 7.1$$

Para $P_1(4, 13)$ y $P_2(4.01, 13.0701)$.



$$m_{P_1P_2} = \frac{13.0701-13}{4.01-4} = 7.01$$

Para $P_1(4, 13)$ y $P_2(4.001, 13.007001)$.



$$m_{P_1P_2} = \frac{13.007001-13}{4.001-4} = 7.001$$

De las gráficas anteriores observamos que la función y la pendiente forman un triángulo rectángulo, cuyos catetos son Δx y Δy, la hipotenusa es la recta secante que une a P_1 con P_2 y **la razón de cambio promedio** es la expresión

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ahora, considerando el procedimiento ejemplificado resuelve el siguiente ejercicio:

Se realizó una investigación para conocer la cantidad de basura en toneladas que en un periodo vacacional de una semana se tiran al mar diariamente en las playas de Acapulco, y los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Días (x)	0	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Toneladas de basura (y)	0	0.3	1.2	2.7	4.8	7.5	10.8	14.7

Calcula:

a) ¿Cuál es la razón de cambio promedio de basura que se arroja al mar entre lunes y martes?

b) ¿Cuáles son las razones de cambio promedio entre martes y miércoles, miércoles y jueves, jueves y viernes, viernes y sábado, sábado y domingo?

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Calcula el cociente de incrementos de cada una de las siguientes funciones entre los puntos dados.

1. $f(t) = 2t + 7$; (1, 9) y (2, 11).

2. $f(x) = 3x - 1$; (0, −1) y (1/3, 0).

3. $h(s) = s^2 - 6s - 1$; (−1, 6) y (3, −10).

4. $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; (1, 0) y (3, $\sqrt{8}$).

INSTRUCCIONES: Lee con atención cada uno de los siguientes reactivos y realiza lo que se solicita.

5. La estatura en cm de un estudiante fue medida cuando nació y posteriormente a intervalos de dos años hasta los 18 años. Los resultados de las mediciones se muestran en la siguiente tabla.

Edad (*x*)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Altura (*y*)	50.2	86.6	103.2	115.9	128	138.6	151.9	151.9	162.5	162.5

Calcula:

I. ¿En qué periodo de su vida creció el estudiante más rápidamente (razón de cambio promedio)

II. ¿En qué periodo de su vida su crecimiento fue más lento?

III. ¿Cuál es su estatura definitiva?

6. Un submarino lanza un proyectil; la altura en metros sobre el nivel del mar está dada por la función $f(x) = -12x^2 + 72x - 60$, donde x es el tiempo en segundos.

   I. Traza la gráfica desde *x = 1* hasta *x = 5* segundos, con intervalos de tiempo de 0.5 segundos.

   II. Calcula las pendientes de las rectas secantes (razones de cambio promedio) para los puntos sucesivos.

7. La cantidad de producción de maíz varía con el clima, la cantidad de lluvia y los cuidados que se le tengan a la siembra; la siguiente tabla muestra las producciones de maíz en miles de toneladas en México entre los años 1982 a 1992.

Años (x)	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
Producción de maíz (y)	9.5	10.3	11.1	11.3	12.9	13.5	14.6	17.6	18.0	19.7	20.8

Determina:

I. ¿Cuál fue la producción promedio de maíz entre los años 1988 y $1988\frac{1}{2}$; 1985 y $1985\frac{1}{2}$?

II. ¿De qué año a qué año la producción promedio de maíz fue mayor y de cuánto fue?

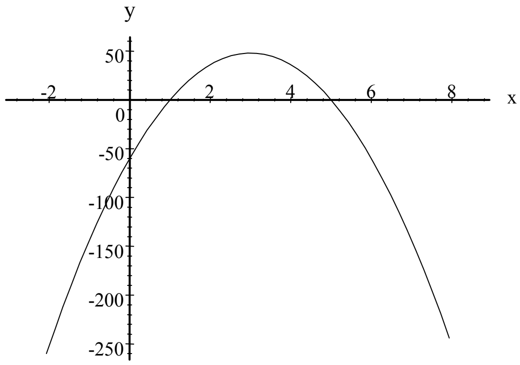
TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$
2	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$
3	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -4$
4	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sqrt{2}$
5	I. Las razones de cambio promedio fueron: De 0 a 2 años: 18.20 De 2 a 4 años: 8.30 De 4 a 6 años: 6.35 De 6 a 8 años: 6.05 De 8 a 10 años: 5.30 De 10 a 12 años: 6.65 De 12 a 14 años: 0.0 De 14 a 16 años: 5.30 De 16 a 18 años: 0.0 Por lo tanto, creció más rápidamente de 0 a 12 años. II. De 12 a 18 años. III. De 162.5 centímetros.

Número de pregunta	Respuesta correcta

6

I.



II.

Tiempo (x)	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
Altura (y)	0	21	36	45	48	45	36	21	0

$m_{P_1P_2} = 42$ $\qquad$ $m_{P_5P_6} = -6$

$m_{P_2P_3} = 30$ $\qquad$ $m_{P_6P_7} = -18$

$m_{P_3P_4} = 18$ $\qquad$ $m_{P_7P8} = -30$

$m_{P_4P_5} = 6$ $\qquad$ $m_{P_8P_9} = -42$

7

I. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3$ y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1.6$

II. De 1988 a 1989; y fue de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3$

Sugerencias

Recuerda que la razón de cambio promedio es la razón de los incrementos de ***y*** con respecto a los incrementos de ***x***, es decir, es el cálculo de la pendiente de una línea recta.

1.2 RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA

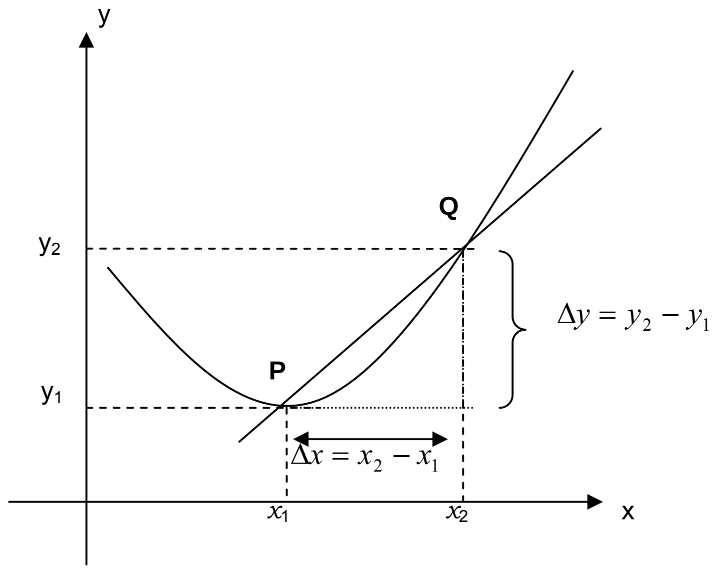
Aprendizajes
• Aproximar numéricamente la razón de cambio instantánea. • Interpretar gráficamente la razón de cambio instantánea.

En la vida diaria encontramos frecuentemente cantidades que cambian con el paso del tiempo; por ejemplo, *"la concentración de sal en el océano está aumentando lentamente"* o *"la población del mundo está creciendo rápidamente"*.

La velocidad, como vimos en la sección anterior, es la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo. Es importante distinguir entre la razón de cambio promedio en un intervalo y la razón de cambio instantánea en un momento preciso. Para ello, recordemos que la pendiente de una línea recta secante a una curva se calcula con la expresión

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

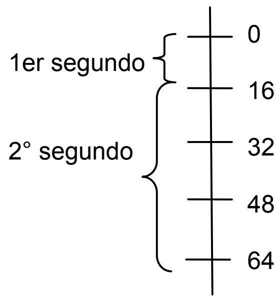
Gráficamente se representa de la siguiente forma:



De la gráfica anterior observamos que la razón de cambio promedio es la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos **P** y **Q**.

Veamos el siguiente ejemplo.

Un objeto P cae en el vacío. Los experimentos demuestran que si empieza en reposo, P cae $16t^2$ pies en t segundos. Esto corresponde a la ecuación $s = 16t^2$; entonces, cae 16 pies en el primer segundo $16(1)^2 = 16$ y 64 en los dos primeros segundos $16(2)^2 = 64$, como muestra la siguiente figura:



$$s = 16t^2$$

Claro está que el objeto P caerá más rápido a medida que transcurre el tiempo. De la figura se observa que en el 2° segundo, es decir, de $t = 1$ a $t = 2$, P cae $(64 - 16)$ pies y su velocidad promedio es:

$$v_{prom.} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{64 - 16}{2 - 1} = 48 \text{ pies por segundo.}$$

Durante el intervalo $t = 1$ a $t = 1.5$, cae $16(1.5)^2 - 16 = 20$ pies; su velocidad promedio es:

$$v_{prom.} = \frac{16(1.5)^2 - 16}{1.5 - 1} = \frac{20}{0.5} = 40 \text{ pies por segundo.}$$

En forma análoga, en los intervalos de tiempo: de $t = 1$ a $t = 1.1$, de $t = 1$ a $t = 1.01$ y de $t = 1$ a $t = 1.001$, tenemos que la velocidad promedio es respectivamente:

$$v_{prom.} = \frac{16(1.1)^2 - 16}{1.1 - 1} = \frac{3.36}{0.1} = 33.6 \text{ pies por segundo.}$$

$$v_{prom.} = \frac{16(1.01)^2 - 16}{1.01 - 1} = \frac{0.3216}{0.01} = 32.16 \text{ pies por segundo.}$$

$$v_{prom.} = \frac{16(1.001)^2 - 16}{1.001 - 1} = \frac{0.032016}{0.001} = 32.016 \text{ pies por segundo.}$$

Lo que hemos hecho es calcular la velocidad media sobre intervalos de tiempo cada vez más cortos, comenzando cada uno en $t = 1$ segundo. Cuanto más corto sea el intervalo, nos aproximamos a la velocidad en el instante $t = 1$. Observando los datos: 48, 40, 33.6, 32.16 y 32.016, vemos que la velocidad promedio se aproxima a 32 cuando el intervalo de tiempo es cada vez más pequeño, de manera que es claro que la velocidad tiende a 32, con la cual coincidirá si el intervalo es cero, es decir, cuando tenemos la velocidad instantánea. Pero seamos más precisos; supóngase que el objeto P se mueve a lo largo del eje coordenado de modo que su posición en el momento t está dada por $s = f(t)$. En el instante c, el objeto está en $f(c)$ y en el instante $c+h$, en $f(c+h)$, por lo tanto, la velocidad media durante este intervalo es:

$$v_{prom.} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Se define la velocidad instantánea v en el instante c (razón de cambio instantánea), mediante la siguiente expresión:[1]

$$v = \lim_{h \to 0} v_{prom.} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Aplicando esta fórmula al ejercicio en el instante $t = 1$, tenemos lo siguiente:

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16(1+h)^2 - 16}{h}$$

Desarrollando el binomio y realizando las operaciones indicadas se obtiene:

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{16(1+2h+h^2)-16}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16+32h+16h^2 - 16}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 32+16h$$

Como $h \to 0$ (*h* se acerca a cero), el segundo término tiende a cero obteniendo como resultado:

$$v = \lim_{h \to 0} 32+16h = 32$$

la cual es la razón de cambio instantánea cuando $t = 1$ segundo.

Podemos concluir que la *pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea son iguales*; esto es:

$$v_{inst} = m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

[1] *Cfr*. Purcell, Edwin J. *Cálculo Diferencial e Integral.* Prentice-Hall Hispanoamericana. p p. 95-96.

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Supongamos que $f(x) = x^2$ es la distancia a la que cae un objeto en *x* segundos. Vamos a determinar una aproximación a su velocidad cuando $x = 2$ mediante intervalos de $x = 2$ a $x = 2.01$, de $x = 2$ a $x = 2.001$ y de $x = 2$ a $x = 2.0001$.

Si aplicamos la razón de cambio promedio, tenemos que:

Si $x = 2$, entonces $f(x) = 4$, entonces tenemos el punto $P_1(2, 4)$

Si $x = 2.01$, entonces $f(x) = 4.0401$, entonces tenemos el punto $P_2(2.01, 4.0401)$

Si $x = 2.001$, entonces $f(x) = 4.004001$, entonces tenemos el punto $P_3(2.001, 4.004001)$

Si $x = 2.0001$, entonces $f(x) = 4.00040001$, entonces tenemos el punto $P_4(2.0001, 4.00040001)$

Calculamos ahora las razones de cambio promedio, recordando que:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4.0401 - 4}{2.01 - 2} = 4.0100 \quad de\, P_1 \;\; a \;\; P_2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4.004001 - 4}{2.001 - 2} = 4.0010 \quad de\, P_1 \;\; a \;\; P_3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4.00040001 - 4}{2.0001 - 2} = 4.0001 \quad de\, P_1 \;\; a \;\; P_4$$

Observemos que cuando $x = 2$, la velocidad se aproxima a 4, y esto ocurre cuando los intervalos de tiempo (Δx) son cada vez más pequeños, es decir, nos estamos acercando al límite cuando $\Delta x \to 0$, que se lee "el límite cuando delta equis tiende a cero". Podemos concluir de este ejemplo que cuando $x = 2$, la **velocidad instantánea** toma el valor de 4.

Observa cuidadosamente el siguiente ejercicio.

Una nueva población empezó con 500 habitantes. El número de habitantes, $g(t)$, en un tiempo t está dado por la función $g(t) = -25t^2 + 100t + 500$.

1. Veamos cómo se calcula la tasa promedio de crecimiento de la población desde su fundación hasta:

   a) Dos años después.

   b) Tres años después.

c) Entre dos y cuatro años posteriores a su fundación.

Se sustituyen los valores de los años (hasta cuatro) en la función, obteniendo los siguientes datos:

$x = t$	0	1	2	3	4
$y = g(x)$	500	575	600	575	500

De la tabla anterior, tenemos lo siguiente:

a) Para dos años después:

$$\frac{\Delta g(t)}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{600 - 500}{2 - 0} = 50$$

b) Para tres años después:

$$\frac{\Delta g(t)}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{575 - 500}{3 - 0} = 25$$

c) Entre dos y cuatro años:

$$\frac{\Delta g(t)}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{500 - 600}{4 - 2} = -50$$

Ahora obtendremos la tasa de crecimiento instantánea exactamente:

a) Un año después.

b) Dos años después.

c) Tres años después de su fundación.

Para encontrar la tasa de crecimiento instantánea, debemos aplicar la expresión de límite a la función de segundo grado, esto es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Esto quiere decir que debemos incrementar la función de la siguiente manera:

Si $g(t) = -25t^2 + 100t + 500$, entonces:

$$\lim_{\Delta t \to 0} g(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-25(t + \Delta t)^2 + 100(t + \Delta t) + 500 - \left(-25t^2 + 100t + 500\right)}{\Delta t}$$

Ahora desarrollamos los binomios y efectuamos las multiplicaciones indicadas para ir simplificando la expresión.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{-25(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) + 100t + 100\Delta t + 500 + 25t^2 - 100t - 500}{\Delta t}$$

Simplificamos la expresión y hacemos que $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{-25t^2 - 50t\Delta t - 25(\Delta t)^2 + 100t + 100\Delta t + 500 + 25t^2 - 100t - 500}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{-50t\Delta t - 25(\Delta t)^2 + 100\Delta t}{\Delta t} = -50t - 25\Delta t + 100$$

Como $\Delta t \to 0$, entonces el resultado es: $-50t + 100$

Si ahora consideramos los tiempos, tenemos que:

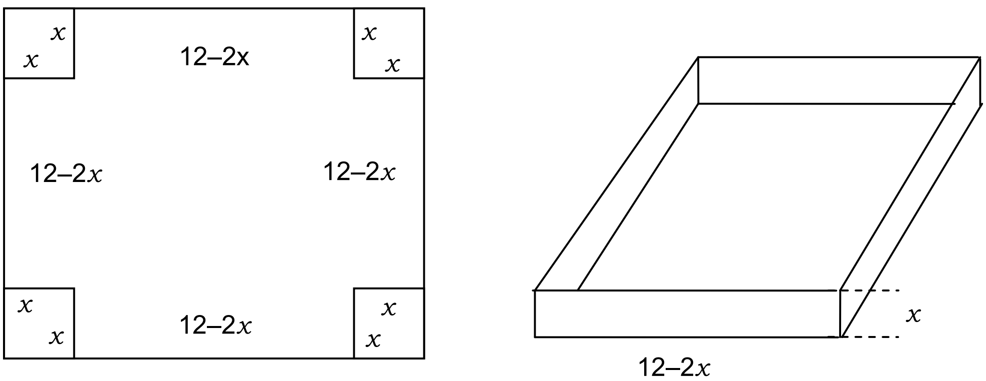
Si $t = 1$, entonces la tasa de crecimiento instantánea es: $-50(1) + 100 = 50$

Si $t = 2$, entonces la tasa de crecimiento instantánea es: $-50(2) + 100 = 0$

Si $t = 3$, entonces la tasa de crecimiento instantánea es: $-50(3) + 100 = -50$

Analiza el siguiente ejemplo.

Con láminas cuadradas de 12 cm por lado se desea construir cajas sin tapa del máximo volumen posible. Para ello, a las láminas se les recortan cuadrados iguales en las esquinas y se realizan dobleces hacia arriba, como se muestra en la figura.



Si *x* es el lado del cuadrado que se va a cortar y V es el volumen de la caja resultante, entonces

$$f(x) = x(12-2x)(12-2x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

a) ¿Cuál es la gráfica de la función?

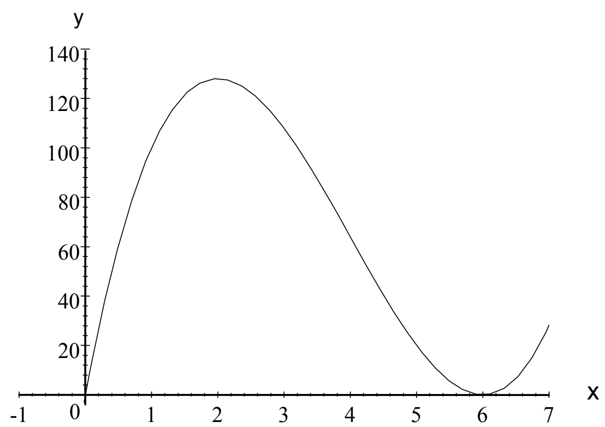
b) ¿Cuánto mide cada lado *x* de los cuadrados que se cortan?

c) ¿Cuál es el volumen máximo de la caja?

a) Si consideramos que *x* toma los valores de cero hasta 6 centímetros, tenemos:

x	*y*
0	0
1	100
2	128
3	108
4	64
5	20
6	0

Graficando estos puntos tenemos:



Para calcular la razón de cambio instantánea, utilizamos la fórmula:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Realizando el incremento, tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x+\Delta x)^3 - 48(x+\Delta x)^2 + 144(x+\Delta x) - (4x^3 - 48x^2 + 144x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^3 + 12x^2\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 - 48x^2 - 96x\Delta x - 48(\Delta x)^2 + 144x + 144\Delta x - 4x^3 + 48x^2 - 144x}{\Delta x}$$

Reduciendo términos semejantes, tenemos:

$$\underset{\Delta x \to 0}{lím} \frac{12x^2\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 - 96x\Delta x - 48(\Delta x)^2 + 144\Delta x}{\Delta x}$$

Simplificando Δx :

$$\underset{\Delta x \to 0}{lím} 12x^2 + 12x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 96x - 48(\Delta x)^2 + 144$$

Hacemos que $\Delta x \to 0$ y tenemos como resultado:

$$12x^2 - 96x + 144$$

que es la razón de cambio instantánea para el valor más alto de la curva.

b) Como el resultado es una ecuación cuadrática debemos resolverla, y el método más sencillo para hacerlo es la factorización, que ya conoces; la expresión cuadrática se divide entre 12 para facilitar la factorización, entonces la expresión queda de la siguiente forma:

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Por lo tanto, los factores resultantes son:

$$(x-6)(x-2) = 0$$

Al igualarlos por separado con cero, resultan las dos raíces: $x = 6 \;\; y \;\; x = 2$, que son las soluciones de la ecuación cuadrática.

Sustituimos los valores en la función original para hallar el valor de y :

$f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$, por lo tanto:

Si $x = 6$, entonces $y = 0$

Este punto sería (6, 0), el cual no está en la gráfica.

Si $x = 2$, entonces $y = 128$

Este punto sería (2, 128), el vértice de la parábola, es decir, el punto máximo de la curva y por consecuencia, la solución.

c) A la lámina metálica le tendrán que cortar cuadrados de 2 cm de lado en las correspondientes esquinas para obtener el volumen máximo de 128 cm^3.

Ahora, resuelve el siguiente ejercicio aplicando las ideas anteriores.

¿Cuál es la razón de cambio instantánea para la siguiente función?

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención el siguiente reactivo y contesta lo que se solicita.

1. Se lanza una pelota al aire que sigue una trayectoria descrita por la función cuadrática:

$y = x - 0.02x^2$, donde x está en pies.

I. ¿Cuál es la gráfica de la trayectoria?

II. ¿Cuál es la distancia total horizontal que recorre la pelota?

III. ¿Cuál es la expresión que representa la razón de cambio instantánea de la altura de la pelota respecto al cambio horizontal?

IV. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

INSTRUCCIONES: Calcula la razón de cambio instantánea para las siguientes funciones.

2. $f(x) = x^2 - 3$

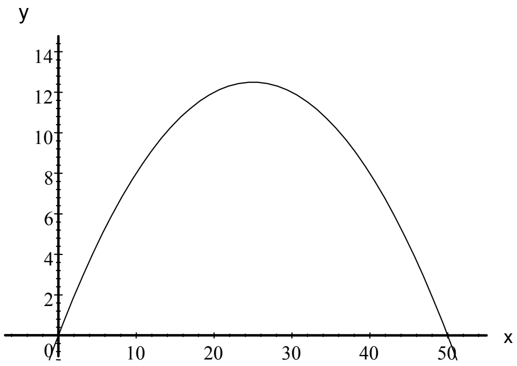
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

4. $f(t) = -t^2 + 80t$

TABLA DE COMPROBACIÓN

<table>
<tr><th>Número de pregunta</th><th>Respuesta correcta</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
I.

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td></tr>
<tr><td>y</td><td>0</td><td>8</td><td>12</td><td>12</td><td>8</td><td>0</td></tr>
</table>



II. La distancia total horizontal es de 50 pies.

III. La razón de cambio instantánea es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - 0.02(x+\Delta x)^2 - (x - 0.02x^2)}{\Delta x}$$

Aplicando el límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - 0.02x^2 - 0.04x\Delta x - 0.02(\Delta x)^2 - x + 0.02x^2}{\Delta x} = -0.04x + 1$$

IV. Con base en la gráfica, la altura máxima que alcanza la pelota es de y = 12.5 pies.
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
La razón de cambio instantánea de $f(x) = x^2 - 3$ es:

$$\lim_{\Delta x \leftarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - 3 - (x^2 - 3)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \leftarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3 - x^2 + 3}{\Delta x}$$

Reducimos y aplicamos el límite:

2*x*, que es el resultado.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Número de pregunta</th><th>Respuesta correcta</th></tr>
<tr><td>3</td><td>
La razón de cambio instantánea de $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ es:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}-\sqrt{x^2-1}}{\Delta x}=$$

Lo multiplicamos por su conjugado:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}-\sqrt{x^2-1}}{\Delta x}\left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}+\sqrt{x^2-1}}\right)=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

Simplificamos y reducimos términos semejantes

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-1-x^2+1}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

Aplicamos el límite:

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\quad\therefore\quad\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
La razón de cambio instantánea de $f(t)=-t^2+80t$ es:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(t+\Delta t)^2+80(t+\Delta t)-(-t^2+80t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-t^2-2t\Delta t-(\Delta t)^2+80t+80\Delta t+t^2-80t}{\Delta t}$$

Simplificamos términos:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2t\Delta t-(\Delta t)^2+80\Delta t}{\Delta t}\qquad\therefore -2t+80$$
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Sugerencias</th></tr>
<tr><td colspan="2">
Recuerda que los procedimientos algebraicos son esenciales en la solución donde se emplean límites.

La razón de cambio promedio se calcula en un intervalo y la razón de cambio instantánea se calcula en un punto o momento dado.
</td></tr>
</table>

AUTOEVALUACIÓN

Cuentas con sesenta minutos para realizar estos ejercicios.

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y contesta lo que se pide.

1. Una epidemia de cierta enfermedad, para la que no hay cura, azota una ciudad y los médicos estiman que el número de personas enfermas en un tiempo x, medido en días, está dado por la expresión:

   $$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

   ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de la epidemia para cuando $x = 65$ días?

2. ¿Cuál es la razón de velocidad instantánea de un objeto en caída libre cuya expresión algebraica está dada por: $S(t) = -16t^2 + 100$, para cuando $t = 3$ seg.?

INSTRUCCIONES: Calcula la razón de cambio instantánea para las siguientes funciones.

3. $f(x) = x^3 - 2x + 4$

4. $f(t) = -t^2 + 80t$

5. $f(x) = x^2 - 3$

CLAVE DE RESPUESTAS

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	La razón de propagación instantánea es: $4x+1$ y si x = 65 días; entonces tendremos 261 personas enfermas.
2	La razón de velocidad instantánea de un objeto es: $-32t$ y si t = 3 seg.; entonces la velocidad es de -96 *m/seg*.
3	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x) + 4 - (x^3 - 2x + 4)}{\Delta x} \quad \therefore \; f'(x) = 3x^2 - 2$
4	$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{(-t+\Delta t)^2 + 80(t+\Delta t) - (-t^2 + 80t)}{\Delta t} \quad \therefore \; f'(x) = -2t + 80$
5	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 - 3 - (x^2 - 3)}{\Delta x} \quad \therefore \; f'(x) = 2x$

UNIDAD 2

LA FUNCIÓN DERIVADA

2.1 LA FUNCIÓN DERIVADA

Aprendizajes

- Aplicar el concepto de derivada a partir de las razones de cambio instantáneas.
- Aplicar el concepto de derivación para hallar la derivada de funciones algebraicas.

Hemos visto que la pendiente de una línea recta está dada por la expresión:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{pendiente de una línea recta.}$$

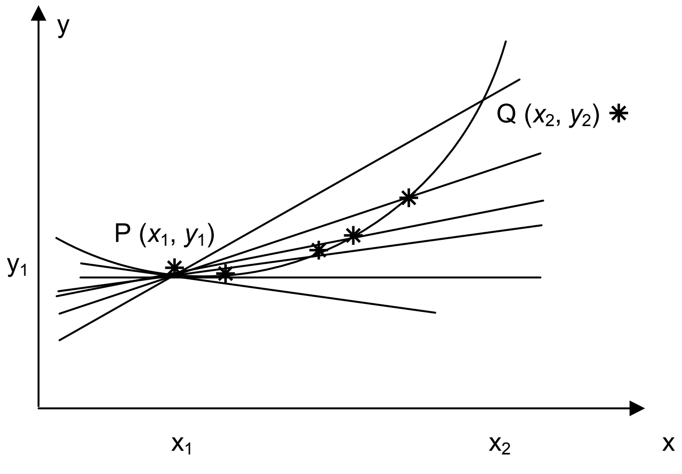
Donde: $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera de la línea recta.

Cuando la línea recta secante cambia de posición $(\Delta x \to 0)$, vemos que la pendiente de esta línea recta secante pasa dos puntos cualesquiera (P y Q), y la expresión es:

$$m_{\text{sec.}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{razón de cambio promedio.}$$

Ahora, si consideramos que $\Delta x \to 0$, es decir, si Q se acerca cada vez más a P, como se ve en la siguiente figura.

|



Entonces la pendiente de la línea tangente en el punto P está dada por la expresión:

$$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{razón de cambio instantánea.}$$

La expresión anterior se llama **derivada de *f* en *x*** (siempre que exista el límite) y se denota por $f'(x)$.

Se dice que una función es **diferenciable** en *x* si existe su derivada en *x*, llamándose **derivación** al procedimiento para calcular la derivada; además, recuerda que no solamente se utiliza el símbolo de $f'(x)$ para denotar la derivada de una función, sino que encontrarás otras, como por ejemplo:

$$f' \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad D_x f$$

Para denotar la derivada de una función, utilizaremos *f'(x)* o *y'* o $\frac{dy}{dx}$ y si introducimos la notación de límite,

tenemos que **la derivada de una función tiene por expresión:**

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Recuerda que la derivada se puede interpretar como una razón de cambio instantánea de una variable respecto a otra.

Para la derivada (pendiente de una línea recta tangente a una curva) de una función por la expresión de límite, utilizaremos el siguiente procedimiento, conocido como el método de los tres pasos. Dada la función

Paso 1. Se incrementa la función y se le resta la función original.

Paso 2. Se divide el incremento de la función entre Δx.

Paso 3. Hacemos que $\Delta x \to 0$ para obtener su derivada.

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Utilicemos el procedimiento anterior para calcular la pendiente de la recta tangente a la función *f(x) = 2x − 3*, en cualquier punto.

Paso 1. Aplicamos la siguiente fórmula a la función:

$$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Paso 2. $$m_{\tan} = f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x) - 3 - (2x-3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + 2\Delta x - 3 - 2x + 3}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

Paso 3. $$m_{\tan} = f(x) = 2$$

Calcula la derivada (pendiente de la recta tangente a una curva) de la función *f(x)* = $-x^2+3$.

Paso 1. $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x+\Delta x)^2 + 3 - (-x^2+3)}{\Delta x}$$

Paso 2. $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 + 3 + x^2 - 3}{\Delta x}$$

Simplificamos términos semejantes.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} -2x - \Delta x$$ **; como** $\Delta x \to 0$ **, entonces:**

Paso 3. $$f'(x) = -2x$$

Ahora vamos a calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$

Paso 1.

Se sustituye la función en la fórmula.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Multiplicamos utilizando binomios conjugados.

$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

Paso 2. Simplificamos radicales y exponentes:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

Paso 3. Simplificamos términos semejantes y hacemos que $\Delta x \to 0$:

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

Finalmente tenemos: $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ahora aplica las ideas anteriores para calcular la derivada de la función $f(x) = -x^3 + 2x - 1$.

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Para cada una de las siguientes funciones, calcula la derivada (la pendiente de la recta tangente a una curva mediante su definición con límite) utilizando el método de los tres pasos.

1. $f(x) = \dfrac{2}{x}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

4. $f(x) = -3x^2 + 2$

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	$f'(x) = \dfrac{-2}{x^2}$
2	$f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$
3	$f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{(x+1)^3}}$
4	$f'(x) = -6x$

Sugerencias

Recuerda que en el método de los tres pasos lo más importante es el incremento de la función menos la función original, dividida entre el incremento de *x*.

2.2 TÉCNICAS DE DERIVACIÓN Y DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Aprendizajes
• Calcular la derivada de funciones algebraicas. • Calcular la derivada de funciones trascendentes. • Calcular las derivadas sucesivas de una función.

Reglas de derivación para funciones algebraicas

Hasta aquí hemos calculado las derivadas de las funciones algebraicas por medio de la definición de derivada como límite. Este procedimiento es tedioso y difícil, por lo que daremos algunas reglas o teoremas que nos permitan calcular la derivada de funciones algebraicas sin usar directamente los límites. Dichas reglas son las siguientes.

1. Regla de las constantes

La derivada de una constante es cero.

$$\frac{d(C)}{dx} = 0 \text{; donde } \mathbf{C} \text{ es una constante.}$$

2. La derivada de la función identidad es uno

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

3. Regla de una constante por una función (producto por un escalar)

$$\frac{dC(u)}{dx} = C\frac{du}{dx} \text{; donde } \mathbf{C} \text{ es una constante y } u \text{ es una función.}$$

4. Regla de la suma y la diferencia de funciones

$$\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

La derivada de la suma, o la diferencia de dos funciones, es la suma o la diferencia de sus derivadas.

5. Regla de las potencias simples

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

6. Regla de las potencias generales

$$\frac{du^n}{dx} = n\left(u^{n-1}\right)\frac{du}{dx}$$

7. Regla del producto de dos funciones

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda función, más la segunda función por la derivada de la primera función.

8. Regla del cociente de dos funciones

$$\frac{d\left(\dfrac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{vu'-uv'}{v^2} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

La derivada del cociente de dos funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, dividido todo por el denominador al cuadrado.

9. Regla de la cadena

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du}\frac{du}{dx} = v'u'$$

Si $y = f(u)$ ***es una función diferenciable en u y*** $u = g(x)$ ***es una función diferenciable en x, entonces :*** $y = f\left[g(x)\right]$ ***es una función diferenciable en x.***

<u>Reglas de derivación para funciones trascendentes</u>

Recuerda que las *funciones trascendentes son las funciones trigonométricas, exponencial y logarítmica.*

a) **Reglas de derivación para las *funciones trigonométricas***

1. Función seno $\quad \dfrac{d(sen\ u)}{dx} = \cos\ u\dfrac{du}{dx}$

2. Función coseno $\quad \dfrac{d(\cos\ u)}{dx} = -sen\,u\dfrac{du}{dx}$

3. Función tangente $\quad \dfrac{d(\tan\ u)}{dx} = \sec^2 u\dfrac{du}{dx}$

4. **Función cotangente** $\dfrac{d(\cot\ u)}{dx} = -\csc^2 u \dfrac{du}{dx}$

5. **Función secante** $\dfrac{d(\sec\ u)}{dx} = \sec u \tan u \dfrac{du}{dx}$

6. **Función cosecante** $\dfrac{d(\csc\ u)}{dx} = -\csc u \cot u \dfrac{du}{dx}$

b) Reglas para derivar la *función exponencial* e^x **y** e^u

Esta derivada hará patente una de las peculiaridades de las funciones trascendentes; si bien la derivada de una función algebraica es siempre algebraica, la derivada de una función trascendente no tiene que ser trascendente. Podemos iniciar comentando que:

1. **Toda derivada de** e^x **es igual a** e^x, esto es:

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

2. **Si *u* es una función derivable en *x* ,** entonces:

$$\frac{d(e^u)}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

3. **Particularmente, si *k* es una constante**, entonces:

$$\frac{d(e^{kx})}{dx} = ke^{kx}$$

c) Reglas para derivar funciones *logarítmicas naturales*

En este apartado vamos a considerar la derivada del logaritmo natural.

1. **Derivada de la función logaritmo natural**

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

2. **Si *u* es una función diferenciable en *x*** , entonces:

$$\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Derivadas de orden superior o derivadas sucesivas

Recuerda que **la derivada de una función es también una función, claramente susceptible de tener otra derivada a la cual llamaremos *segunda derivada de la función.***

Si $y = x^3 - x^2$ entonces:

$y' = 3x^2 - 2x$ por lo tanto

$$y'' = 6x - 2$$

Recuerda que las notaciones para la primera derivada de una función son:

$$f', \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad D_x f \quad \text{ó} \quad \frac{df(x)}{dx}$$

Así, para las segundas derivadas son:

$$f'', \quad y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad D_x^2 f \quad \text{ó} \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

Si después de obtener la segunda derivada continuamos derivando, obtenemos sucesivamente la tercera, cuarta,..., *n*−ésima derivada o derivadas sucesivas.

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Vamos a calcular la derivada de las siguientes **funciones algebraicas** aplicando las reglas correspondientes.

I. $f(x) = 12$

Si aplicamos la regla 1, tenemos:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(12)}{dx} = 0$$

II. $y = 2x + 5$

Si aplicamos las reglas 1, 2 y 3, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(2x+5)}{dx} = 2\frac{dx}{dx} + \frac{d(5)}{dx} = 2(1) + 0 = 2$$

III. $f(x) = \dfrac{-2x+3}{2x+3}$

Si aplicamos las reglas 8, 1, 2 y 3, tenemos:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)\dfrac{d(-2x+3)}{dx} - (-2x+3)\dfrac{d(2x+3)}{dx}}{(2x+3)^2} = \frac{(2x+3)(-2) - (-2x+3)(2)}{(2x+3)^2}$$

Entonces, $$f'(x) = \frac{-4x - 6 + 4x - 6}{(2x+3)^2}$$

Al reducir términos semejantes:

$$f'(x) = \frac{-12}{(2x+3)^2},$$ que es el resultado.

IV. $y = (-5x+1)^6$

Si aplicamos las reglas 2, 3 y 6, tenemos:

$$y' = 6(-5x+1)^{6-1}(-5) = -30(-5x+1)^5,$$ que es el resultado.

V. $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 3}$

Cambiando a exponentes racionales.

$$y = \left(-x^2 + 4x + 3\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si aplicamos las reglas 6, 1, 2 y 3, tenemos:

$$y' = \frac{1}{2}\left(-x^2 + 4x + 3\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(-2x + 4\right) = \frac{1}{2}\left(-x^2 + 4x + 3\right)^{\frac{-1}{2}}\left(-2x + 4\right)$$

Simplificando:

$$y' = \frac{-x + 2}{\left(-x^2 + 4x + 3\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-x + 2}{\sqrt{-x^2 + 4x + 3}},$$ que es el resultado.

Aplica las reglas correspondientes y calcula la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x + 2}{2x - 1}$

Aplicando las reglas correspondientes calcularemos la derivada de las siguientes **funciones trigonométricas.**

I. $y = \cos\left(3x^2\right)$

Aplicamos la regla de la función coseno.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos 3x^2)}{dx} = -sen(3x^2)\frac{d(3x^2)}{dx} = -sen(3x^2)(6x)$$

Por lo tanto: $$\frac{dy}{dx} = -6x\ sen(3x^2)$$

II. $y = \tan^4(3x)$

Aplicamos la regla 6 de las funciones algebraicas y después la regla de la función tangente.

$$y' = 4\tan^{4-1}(3x)\frac{d\tan(3x)}{dx} = 4\tan^3(3x)\left[\sec^2 3x(3)\right]$$

Reduciendo términos obtenemos:

$$y' = 12\tan^3(3x)\sec^2(3x)$$

III. $y = \csc\left(\frac{x}{2}\right)$

Aplicamos la regla 8 de las funciones algebraicas y después la regla de la función cosecante.

$$y' = -\csc\left(\frac{x}{2}\right)\cot\left(\frac{x}{2}\right)\left[\frac{2(1)-x(0)}{2^2}\right] = -\csc\left(\frac{x}{2}\right)\cot\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$y' = -\frac{1}{2}\ \csc\frac{x}{2}\ \cot\frac{x}{2}$; que es el resultado final.

IV. $y = \sqrt{sen\,4x}$

Aplicamos la regla 6 de las funciones algebraicas y después la regla de la función seno.

Recuerda que $\sqrt{x} = x^{1/2}$, aplicando esta propiedad tenemos:

$$y' = \frac{1}{2}(sen\,4x)^{-1/2}\left[\cos\ 4x(4)\right] = \frac{4\cos 4x}{2(sen\,4x)^{1/2}}$$

Simplificamos y el resultado es: $$y' = \frac{2\cos(4x)}{\sqrt{sen\,(4x)}}$$

V. $y = x^2 \; sen \cdot x$,

Aplicamos las reglas 6 y 7 de las funciones algebraicas, y la regla de la función seno.

$$y' = x^2 \left[\cos x(1)\right] + sen\, x(2x)$$

Ordenando llegamos al resultado:

$$y' = x^2 \cos x + 2x \; sen\,(x)$$

VI. $y = 4\, tan\,(5x)$

Aplicamos las reglas 7 y 3 de las funciones algebraicas y luego la regla de la función tangente.

$y' = 4\left[\sec^2 5x(5)\right] + \tan(5x(0)) = 20 \sec^2 5x$, que es el resultado.

Aplica las reglas correspondientes y calcula la derivada de la función $f(x) = sen^2 x \;\; (2x)$

Vamos a calcular la derivada de las siguientes **funciones exponenciales** aplicando las reglas correspondientes.

I. $y = e^{2x-1}$

Si aplicamos la regla 3, tenemos:

$y' = 2e^{2x-1}$; que es el resultado.

II. $y = e^{\frac{-3}{x}}$

Si aplicamos la regla 2 y la regla 8 algebraica, tenemos:

$$y' = e^{\frac{-3}{x}}\left[\frac{x(0)+3(1)}{x^2}\right] = e^{\frac{-3}{x}}\left(\frac{3}{x^2}\right)$$

Por lo tanto, el resultado es:

$$y' = \frac{3e^{\frac{-3}{x}}}{x^2}$$

III. $y = e^{x^2}$

Si aplicamos la regla 2, tenemos:

$y' = e^{x^2}(2x) = 2xe^{x^2}$, que es el resultado.

IV. $y = e^{\frac{-x}{2}}$

Si aplicamos la regla 2 y la regla 8 algebraica, obtenemos como resultado:

$$y' = e^{\frac{-x}{2}}\left[\frac{2(-1)+x(0)}{4}\right] = \frac{-e^{\frac{-x}{2}}}{2}$$

V. $y = e^{sen(3x)}$

Si aplicamos la regla 2 y la regla 1 trigonométrica, llegamos al siguiente resultado:

$$y' = e^{sen(3x)}[\cos(3x)(3)] = 3e^{sen(3x)}\cos(3x)$$

VI. $f(x) = e^{-x}$

Si aplicamos la regla 2, tenemos siguiente resultado:

$$f'(x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$$

Aplicando las reglas correspondientes calcula la derivada de la función $y = 2x^3 \quad e^{-2}$

Vamos a calcular la derivada de las siguientes funciones logaritmo natural aplicando las reglas correspondientes.

I. $f(x) = \ln(2x^2 + 4)$

Si aplicamos la regla 2 y las reglas 3 y 5 de las funciones algebraicas, tenemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{2x^2 + 4}(4x) = \frac{4x}{2x^2 + 4} = \frac{2(2x)}{2(x^2 + 2)}$$

Por lo tanto, el resultado es:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$$

II. $f(x) = \ln\sqrt{x+1}$

Si aplicamos la regla 2 y la regla 6 algebraicas, tenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}\left[\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}(1)\right] = \frac{1}{\left(\sqrt{x+1}\right)2\left(\sqrt{x+1}\right)} = \frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^2}$$

Por lo tanto, el resultado es:

$$f'(x) = \frac{1}{2x+2}$$

III. $y = 3\ln x$

Si aplicamos la regla 2 y la regla 7 algebraica, tenemos:

$y' = 3\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x(0) = \frac{3}{x}$, que es el resultado.

IV. $y = x^2 + \ln x$

Si aplicamos la regla 2 y la regla 4 algebraica, tenemos:

$$y' = 2x + \frac{1}{x}$$, que es el resultado.

V. $y = \ln\left(x^2 + x\right)$

Si aplicamos la regla 2, y las reglas 2 y 5 de las funciones algebraicas, tenemos:

$$y' = \frac{1}{x^2 + x}\left(2x + 1\right) = \frac{2x + 1}{x^2 + x}$$, que es el resultado.

VI. $y = \ln(\ln x)$

Si aplicamos la regla 2, tenemos:

$$y' = \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x \ln x}$$, que es el resultado.

Calcula la derivada de la función $f(x) = \ln\left(3x^3 + 4x + 2\right)$ aplicando las reglas correspondientes.

Observa con cuidado cómo se calcula la **segunda derivada** de la función: $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f''(x) = 2$$

Ahora observa cómo calculamos la **tercera derivada** de la función: $y = x^5 - 3x^4$

$$y' = 5x^4 - 12x^3$$

$$y'' = 20x^3 - 36x^2$$

$$y''' = 60x^2 - 72x$$

Para llegar a la solución de ciertos problemas en ocasiones es necesario obtener estas derivadas, y como puedes observar, no presentan ninguna dificultad.

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Para cada una de las siguientes **funciones algebraicas** calcula su derivada.

1. $y = \dfrac{3x+2}{2x+3}$

2. $y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^5$

3. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

4. $f(x) = \left(2x^2\right)\left(\sqrt{-x+2}\right)$

5. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$

6. $y = \dfrac{x^4 + 6x^3 + 9x^2}{x^3 + 3x^2}$

INSTRUCCIONES: Para cada una de las siguientes **funciones trigonométricas** calcula su derivada.

7. $y = sen\ x\ \cos x$

8. $y = x^2 sen\ x + 2x \cos x - 2\ sen\ x$

9. $y = sen^2(3x - 2)$

10. $y = x\ sen\ x$

11. $y = \tan^2 x$

12. $y = \frac{1}{4}\cot 8x$

INSTRUCCIONES: Para cada una de las siguientes **funciones exponenciales** calcula su derivada.

13. $y = \frac{e^x}{x}$

14. $f(x) = x^2\, e^{3x}$

15. $y = e^{\sqrt{x}}$

16. $y = e^{e^x}$

17. $y = e^{-x}\cos x$

INSTRUCCIONES: Para cada una de las siguientes **funciones logaritmo** natural calcula su derivada.

18. $y = \ln\left(e^{x} + 2\right)$

19. $f(x) = x \ln x$

20. $y = \ln(x+3)^{2}$

21. $y = \ln^{2}(x+3)$

22. $y = \ln \dfrac{x^{4}}{(3x-4)^{2}}$

23. $y = \ln(sen\ 3x)$

24. $y = (\ln x)^4$

25. Calcula la tercera derivada de la función: $y = x\ sen\ x$

26. Calcula la segunda derivada de la función: $f(x) = 4\tan 5x$

27. Calcula la segunda derivada de la función: $y = sen(4x)$

28. Calcula la segunda derivada de la función: $f(x) = \frac{-3}{x}$

29. Calcula la segunda derivada de la función: $y = \frac{x^4 + 6x^3 + 9x^2}{x^3 + 3x^2}$

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	$y' = \dfrac{5}{(2x+3)^2}$
2	$y' = \dfrac{5x^4}{(x+1)^6}$
3	$y' = \dfrac{1}{4\sqrt{x}}$
4	$f'(x) = \dfrac{-5x^2+8x}{\sqrt{-x+2}}$
5	$f'(x) = \dfrac{x^3+18x}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$
6	$y' = 1$
7	$y' = -\text{sen}^2 x + \cos^2 x$
8	$y' = x^2 \cos x$
9	$y' = 6\, sen(3x-2)\, cos(3x-2)$
10	$y' = x\, cos + sen\, x$
11	$y' = 2\ \tan x \sec^2 x$
12	$y' = -2\csc^2(8x)$
13	$y' = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$
14	$y' = e^{3x}(3x^2 + 2x)$
15	$y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
16	$y' = e^{(e^x + x)}$
17	$y' = -e^{-x}(sen\ x + cos\ x)$
18	$y' = \dfrac{e^x}{e^x + 2}$
19	$f'(x) = 1 + \ln x$
20	$y' = \dfrac{2}{x+3}$
21	$y' = \dfrac{2\ln(x+3)}{x+3}$

Número de pregunta	Respuesta correcta
22	$y' = \frac{4}{x} - \frac{6}{3x-4}$
23	$y' = 3\cot 3x$
24	$y' = \frac{4}{x}(\ln x)^3$
25	$y''' = -x\cos x - 3senx$
26	$y'' = 200\sec^2 5x\, tg\, 5x$
27	$y'' = -16sen4x$
28	$y'' = -\frac{6}{x^3}$
29	$y'' = 0$

Sugerencias

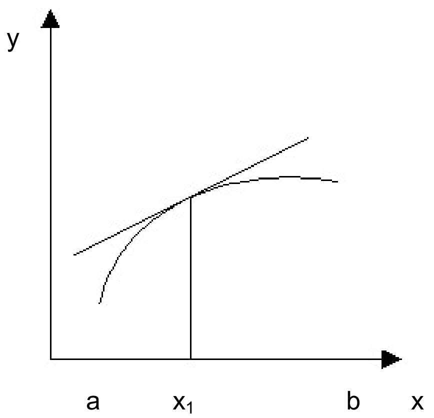
Es importante que repases las reglas para derivar las diferentes funciones, de ser necesario puedes consultar: Cálculo diferencial e integral de J. Purcell y D. Varberg. Prentice Hall. México pp. 107−126.

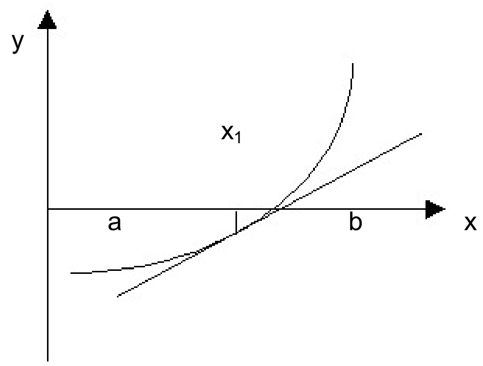
2.3 APLICACIONES DE LA DERIVADA

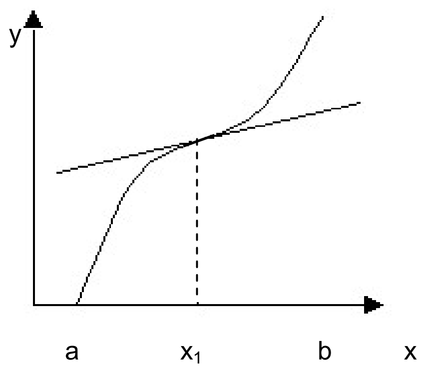
Aprendizajes

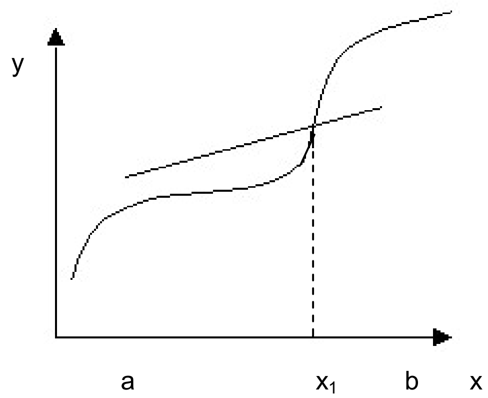
- Aplicar la derivada para calcular valores críticos, puntos máximos y mínimos, sentido de concavidad y puntos de inflexión.
- Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal.

Recordemos **que una función es creciente sobre un intervalo, si su gráfica asciende. Una función es decreciente sobre un intervalo, si su gráfica desciende**. A continuación haremos un bosquejo de la gráfica de cuatro diferentes funciones sobre el intervalo (a, b); es decir, para *x* entre a y b.









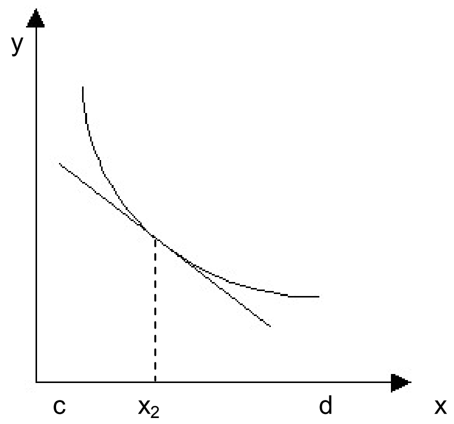
Todas las afirmaciones que siguen son verdaderas para estas cuatro funciones.

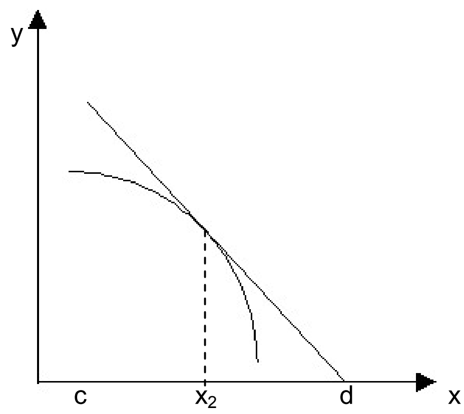
a) La gráfica se eleva sobre todo el intervalo (a, b).

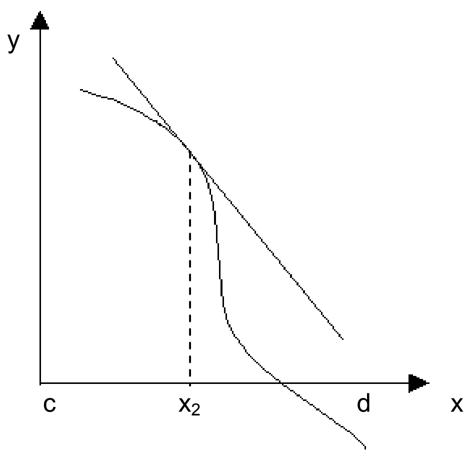
b) Cada función es creciente sobre el intervalo (a, b).

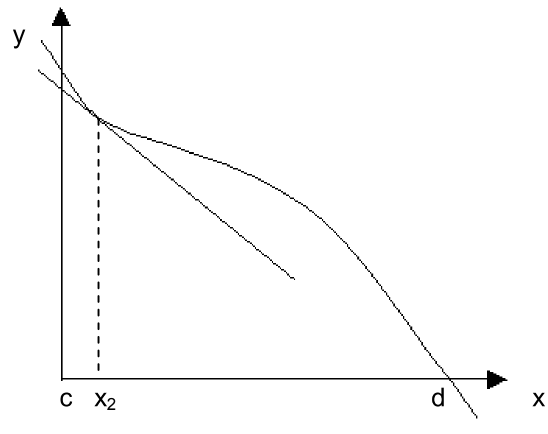
c) Una recta tangente en cualquiera de las gráficas, en cualquier punto, digamos x_1 en el intervalo (a, b), tiene pendiente positiva.

A continuación tenemos las gráficas de otras cuatro funciones, ahora sobre el intervalo (c, d); es decir, para x entre c y d.





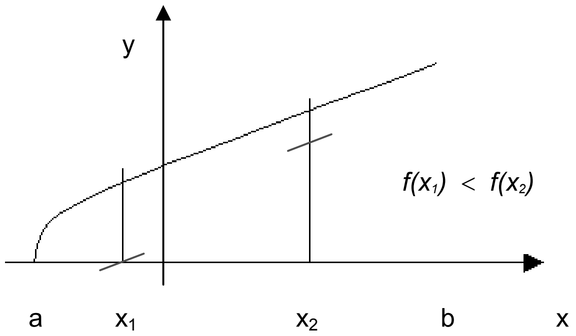




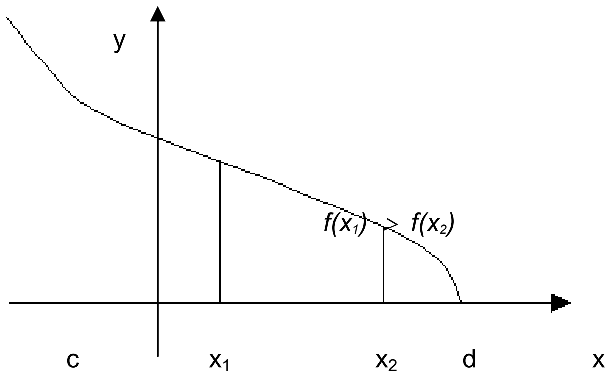
Todas las afirmaciones que siguen son verdaderas para estas cuatro funciones.

a) Cada gráfica desciende sobre el intervalo (c, d).
b) Cada función decrece sobre el intervalo (c, d).
c) La recta tangente a cualquiera de las gráficas en cualquier punto, digamos x_2 en el intervalo (c, d), tiene pendiente negativa.

Con base en lo anterior, podemos decir que $f(x)$ es creciente en el intervalo o sobre el intervalo (a, b), si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 del intervalo, se cumpla que $x_1 < x_2$. Entonces:



Ahora, $f(x)$ es decreciente en el intervalo o sobre el intervalo (c, d), si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 del intervalo, se cumpla que $x_1 > x_2$. Entonces:



Recuerda que el signo de la derivada nos permite hablar del carácter de una función desde el punto de vista de ser creciente o decreciente, entonces:

Si $f'(x) > 0$ en todo el intervalo, entonces *f(x)* es creciente en el intervalo.

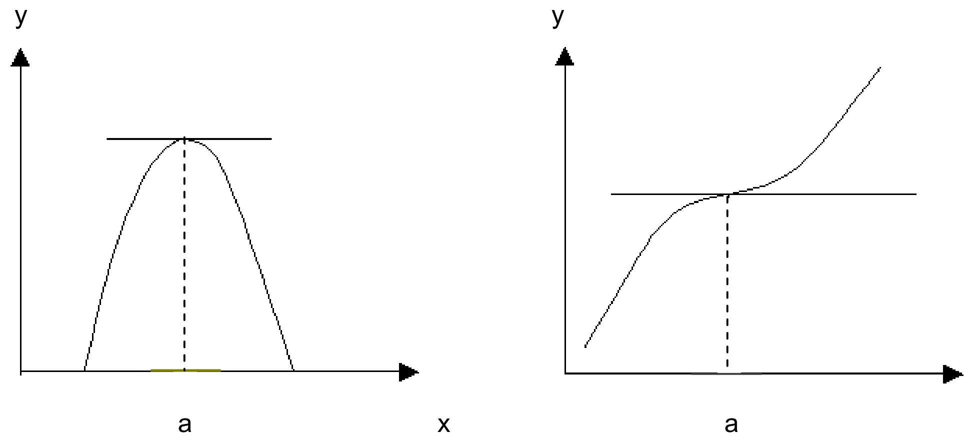
Si $f'(x) < 0$ en todo el intervalo, entonces *f(x)* es decreciente en el intervalo.

Puntos críticos de una función

Si la función tiene una derivada en $x = a$, entonces será verdad una de las siguientes afirmaciones:

$$f'(a) > 0 \quad ó \quad f'(a) < 0 \quad ó \quad f'(a) = 0$$

Cualquier número a en la cual $f'(a) = 0$ se llama punto crítico ó valor crítico de la función. Si $f'(a) = 0$, entonces la recta tangente a la curva en $x = a$ es horizontal, como se muestra en las siguientes gráficas:



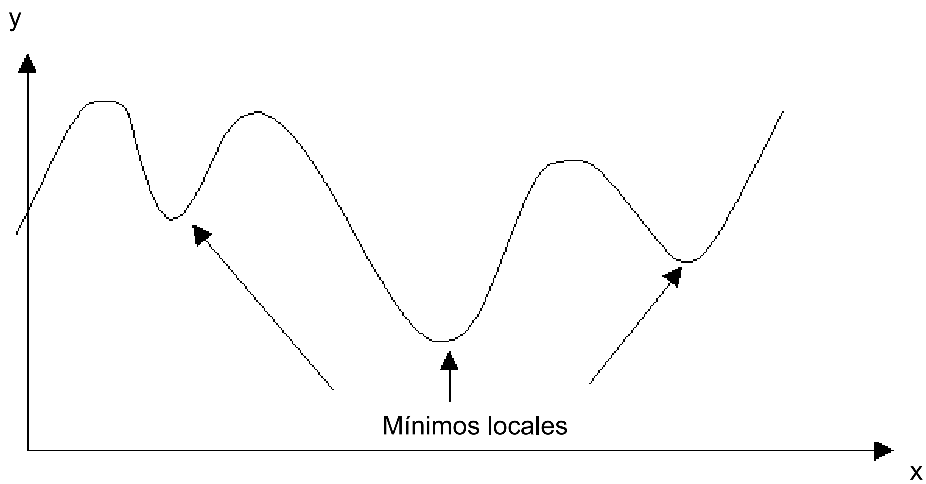
Los puntos críticos de una función son de mucha importancia al trazar una curva. Para obtener los puntos críticos de una función primero calculamos la derivada de la función, se iguala a cero y después la factorizamos y resolvemos la ecuación $f'(x)$ = 0 resultante.

Valores máximos y mínimos

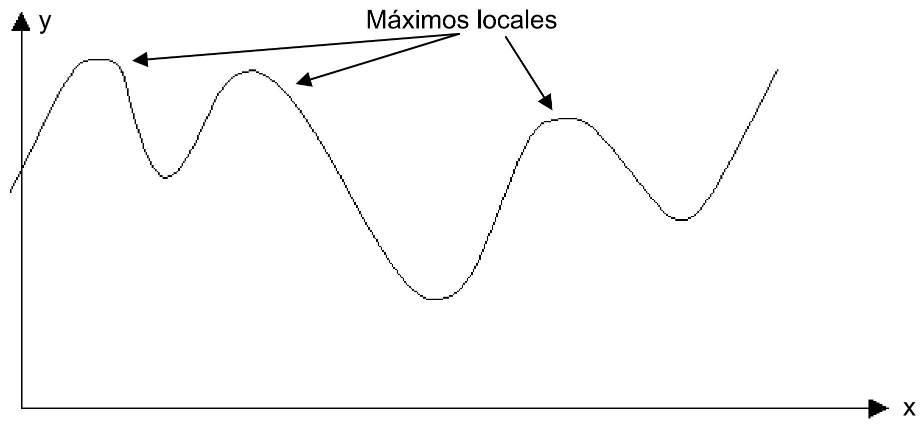
Un gran número de aplicaciones en Cálculo involucran la determinación de los puntos más altos ó bajos de una curva. Estos puntos corresponden a lo que llamamos máximos o mínimos de la función.

La primera derivada es de utilidad para identificar estos puntos.

Intuitivamente un mínimo local de una función es un punto donde el valor de la función es menor que en cualquier otro punto de su vecindad o entorno; un mínimo local puede o no ser el punto más bajo de toda la gráfica.



Intuitivamente un máximo local de una función es un punto en el que *el valor* de la función es mayor de lo que es en cualquier punto de su entorno; un máximo local puede ser o no ser el punto más alto de toda la gráfica.



Procedimiento para obtener máximos y mínimos

Si la función es diferenciable en [a, b], es decir, derivable, entonces es continua en cada punto de [a, b] y se procede como sigue:

a) Se resuelve $f'(x)$ = 0 para encontrar los puntos críticos de la función en el intervalo [a, b].

b) Se evalúa la función en cada punto crítico del intervalo [a, b], incluyendo los extremos.

c) El valor más pequeño obtenido en el inciso (b) es el mínimo de la función y el valor más grande es el máximo de la función.

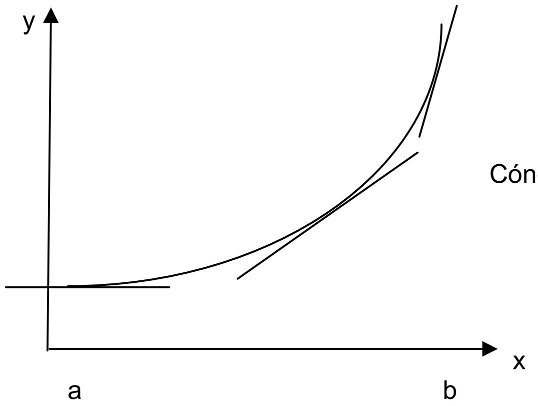
Concavidad

La forma de una curva depende de muchos factores como son: dónde es positiva o negativa la función, dónde es creciente o decreciente la función, dónde ocurren máximos y mínimos, y dónde cambia la concavidad.

La gráfica de *f(x)* es **cóncava hacia arriba** sobre un intervalo (a , b), **si en todo el intervalo la curva está por encima de sus rectas tangentes**.

Si examinamos las pendientes de las rectas tangentes que se obtienen al recorrer la curva de izquierda a derecha, notamos que la pendiente de la derivada de la función $f'(x)$ **crece** (recuerda que definimos esta noción de curvarse hacia arriba o hacia abajo como **concavidad**).

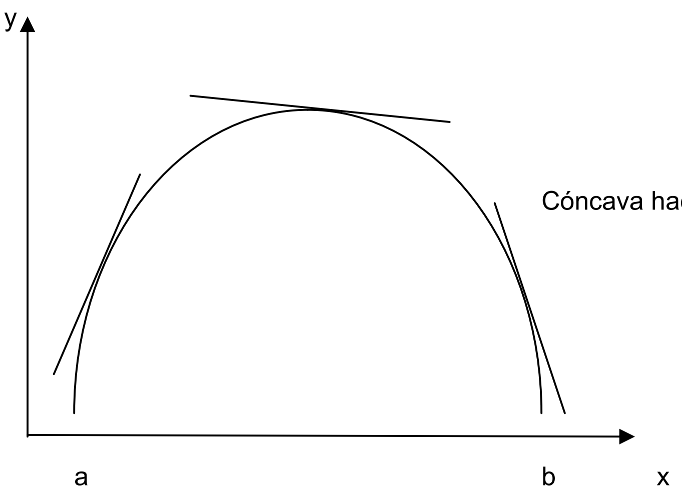
Sea la función diferenciable en (a, b); decimos que **la gráfica de la función es cóncava hacia arriba en el intervalo (a, b), si $f'(x)$ es creciente en dicho intervalo.**



Cóncava hacia arriba, si $f'(x)$ es creciente.

Si la gráfica de la función es **cóncava hacia abajo** en el intervalo (a, b), entonces, sobre todo el intervalo, **la curva está por debajo de sus rectas tangentes,** por lo que las pendientes de la derivada de la función decrecen cuando recorremos la curva de izquierda a derecha. Entonces:

Sea la función diferenciable en el intervalo (a, b); decimos que la gráfica de **la función es cóncava hacia abajo en el intervalo (a, b), si $f'(x)$ es decreciente en dicho intervalo.**



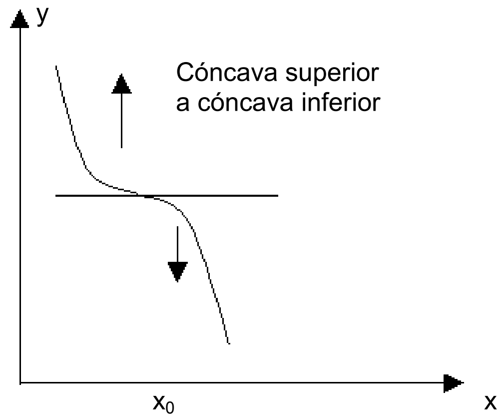
Cóncava hacia abajo, si $f'(x)$ es decreciente.

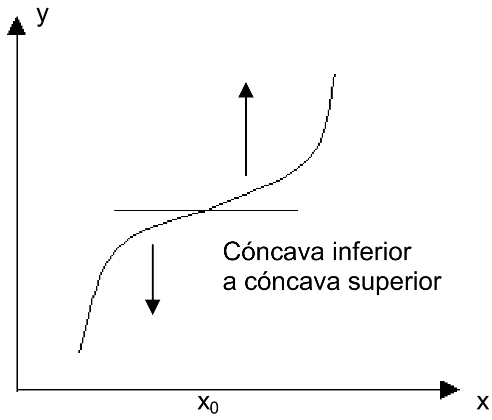
Recuerda que **si la segunda derivada de la función es mayor que cero** $[f''(x) > 0]$, entonces la gráfica de la función es **cóncava hacia arriba** sobre el intervalo (a, b). Y **si la segunda derivada de la función es menor que cero** $[f''(x) < 0]$, entonces la gráfica de la función es **cóncava hacia abajo** sobre el intervalo (a, b).

Puntos de inflexión

Un punto de inflexión es un punto en el que **la curva cambia de concavidad**, de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo o viceversa.

En un punto de inflexión, la recta tangente corta la curva y la cruza; si la recta tangente no es vertical, se encontrará por debajo de la curva y a la izquierda del punto, y por arriba de la curva a la derecha del punto ó viceversa.



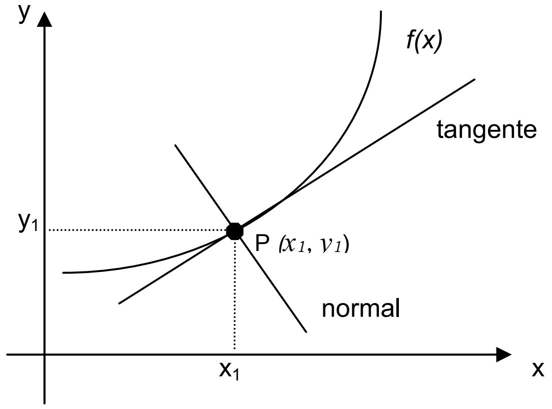


Para determinar los puntos de inflexión y el sentido de concavidad, se debe considerar que la segunda derivada de la función sea continua, entonces:

a) Se calcula la segunda derivada de la función $[f''(x)]$.
b) Se resuelve la segunda derivada de la función igualándola a cero, para encontrar un posible punto de inflexión.
c) Examinamos los signos de la segunda derivada de la función en los intervalos de izquierda a derecha ($x = x_0$). Si la segunda derivada de la función cambia de signo en dicho punto, entonces x_0 es la abscisa de un punto de inflexión; si no cambia de signo en dicho punto, ahí no hay un punto de inflexión.
d) Se determinan los intervalos sobre los cuales la segunda derivada de la función es mayor que cero para hallar donde la curva es cóncava hacia arriba y aquellos intervalos sobre los cuales la segunda derivada de la función es menor que cero, para hallar si es cóncava hacia abajo.

Ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal

Como puede verse en la siguiente figura, la curva representada por $y = f(x)$ contiene al punto P(x_1, y_1), por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en dicho punto es:



$m = f'(x_1)$, donde $f'(x_1)$ es la primera derivada en el punto $x = x_1$.

La ecuación de la recta tangente en el punto P(x_1 , y_1) de pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sustituyendo en la expresión anterior el valor de la pendiente $m = f'(x)$, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ será:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

La recta perpendicular a la recta tangente en el punto P se llama recta normal a la curva, como se observa en la figura anterior. La ecuación de la recta normal es:

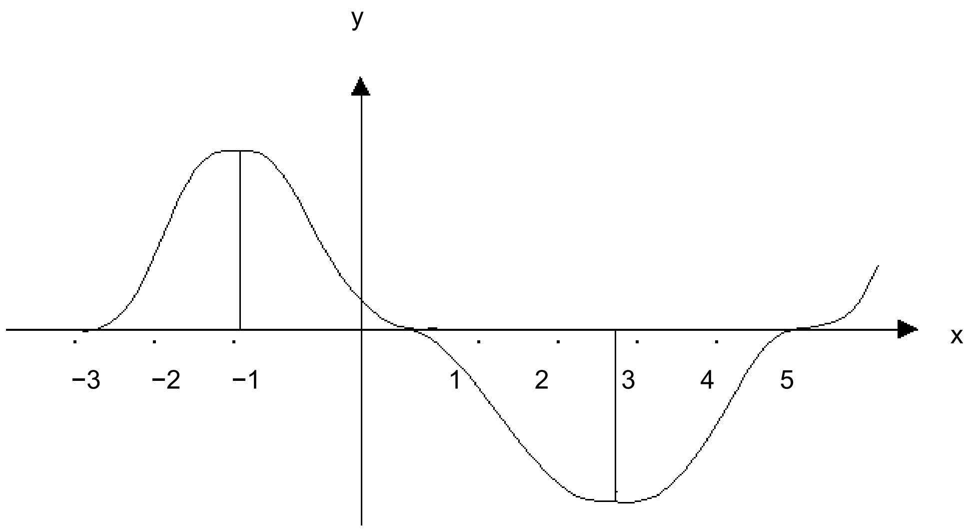
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Si $m = -\dfrac{1}{f'(x_1)}$ por la condición de perpendicularidad entre dos rectas, entonces, sustituyendo el valor de m en la ecuación de la recta tangente, tendremos la ecuación de la recta normal:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

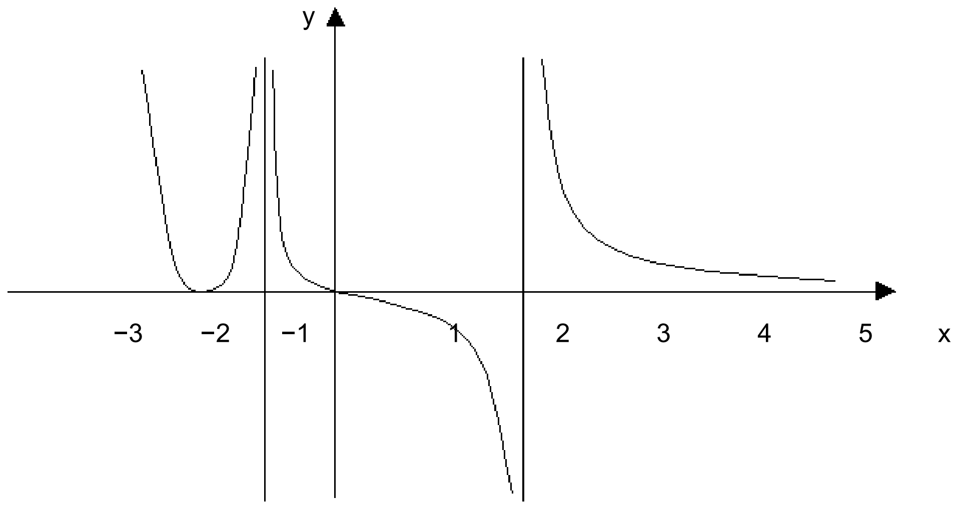
APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Observa con atención este ejemplo. En él se puede ver en qué intervalos crece y decrece la siguiente función.



Se puede observar que la función es creciente en el intervalo cuando $x < -1$, y que decrece en el intervalo [−1, 3], volviendo a crecer en el intervalo cuando $x > 3$.

Ahora encuentra en qué intervalos **crece** y **decrece** la siguiente función (gráfica).



Vamos a calcular y a gráficar los **puntos críticos** de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2$.

Calculamos la primera derivada de la función.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

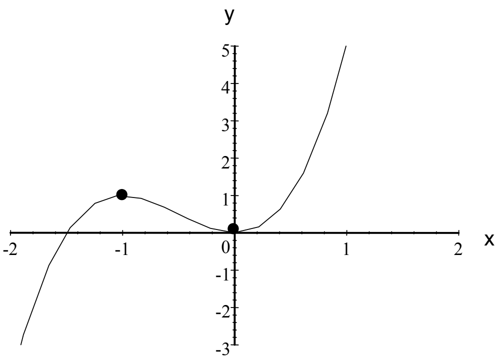
Ahora la igualamos a cero para resolverla.

$$6x^2 + 6x = 0$$

Factorizamos utilizando el factor común.

$$6x(x+1) = 0$$

$\therefore\ x = 0$ y $x = -1$ son los puntos críticos.



Aplica las ideas anteriores y calcula algebraica y gráficamente los **puntos críticos** de la siguiente función:

$f(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$

Vamos a calcular **el máximo y mínimo** de la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$ en el intervalo [−1, 3].

a) Se calcula la primera derivada de la función, la cual es:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

Ahora se iguala la derivada con cero para encontrar los posibles valores de *x* (puntos críticos).

$$4x^3 - 16x = 0$$

Factorizamos utilizando el factor común y binomio conjugado:

$$4x(x^2 - 4) = 4x(x+2)(x-2) = 0$$

Los valores de x son:

$$x = -2\,, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 2\,.$$

El valor de $x = -2$ no está contenido en el intervalo [−1, 3], por lo que no se toma en cuenta.

b) Se evalúa la función para los valores de $x = -1, 0, 1, 2, 3$.

Si $x = -1$, entonces $f(x) = 1$

Si $x = 0$, entonces $f(x) = 8$

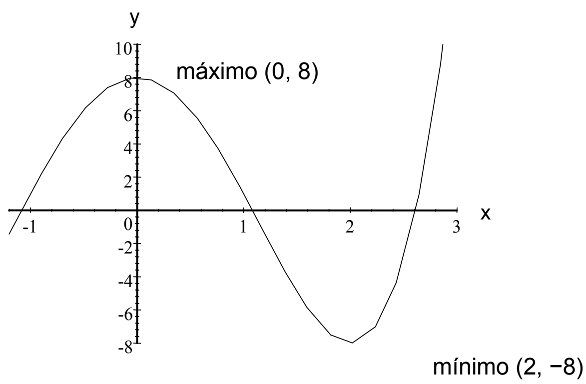
Si $x = 1$, entonces $f(x) = 1$

Si $x = 2$, entonces $f(x) = -8$

Si $x = 3$, entonces $f(x) = 17$

c) Con base en los resultados de la evaluación de la función con los valores de x, tenemos que en $x = 2$ hay un mínimo de la función y cuando $x = 0$ hay un máximo de la función.

Grafiquemos la función original para observar si concuerdan los resultados obtenidos:



De acuerdo con el procedimiento anterior, calcula algebraica y gráficamente los puntos **máximos y mínimos** de la siguiente función:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 14$

Ahora veremos los pasos para calcular los posibles **puntos de inflexión** y determinar el **sentido de la concavidad** de la función $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4$; además, comprobaremos gráficamente los resultados obtenidos.

Primero se obtiene la segunda derivada:

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 60x^3 - 60x^2$$

La segunda derivada se iguala a cero para saber si existe un posible punto de inflexión.

$$60x^3 - 60x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 60x^2(x-1) = 0$$

Entonces tenemos que:

$$x = 0 \quad y \quad x = 1$$

Por lo tanto, cuando $f''(x) = 0$

Entonces $x = 0 \quad y \quad x = 1$ son los posibles puntos de inflexión.

Calculemos los signos de $f''(x)$ considerando que

$$x < 0, \quad 0 < x < 1 \quad y \ 1 < x$$

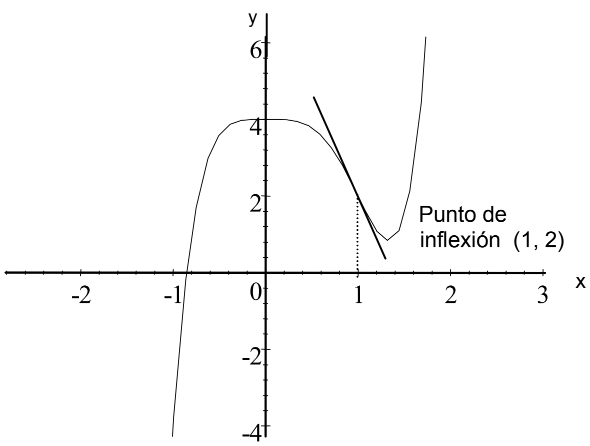
Si $x < 0 \Rightarrow$ consideremos que $x = -1$ y al sustituirlo en la segunda derivada de la función obtenemos que el signo no cambia y no hay punto de inflexión.

Si $0 < x < 1 \Rightarrow$ consideremos que $x = \frac{1}{2}$ y al sustituirlo en la segunda derivada de la función obtenemos que el signo no cambia y no hay punto de inflexión.

Si $1 < x \quad (x > 1) \Rightarrow$ consideremos que $x = 2$ y al sustituirlo en la segunda derivada de la función obtenemos que el signo cambia y ahí (*x = 1*) existe un punto de inflexión.

Entonces podemos mencionar que la curva es cóncava hacia abajo si $x < 0$ ó $0 < x < 1$ y es cóncava hacia arriba si $x > 1$.

Construyamos la gráfica de la función para comprobar los resultados anteriores.



De acuerdo con el procedimiento anterior, calcula los posibles **puntos de inflexión y determina el sentido de concavidad** de la función $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 20$ y construye su gráfica.

Enseguida aplicaremos el procedimiento para obtener las ecuaciones de **las rectas tangente y normal** a la curva $y = x^3 - 3x$ en el punto (2, 2).

Se calcula la primera derivada $y' = 3x^2 - 3$.

Se sustituye el valor de *x* = 2 en la expresión de la primera derivada: *y'* = 9 .

Este valor (*y'* = 9) lo sustituimos en la expresión de la recta tangente:

$$y - 2 = 9(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 9x - 16$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva es:

$$9x - y - 16 = 0$$

La ecuación de la recta normal se obtiene sustituyendo el valor de la pendiente para rectas perpendiculares.

$$m = -\frac{1}{f'(x_1)}$$

En este caso, el valor de la pendiente es: $m = -\frac{1}{9}$

Sustituyendo en la expresión de la recta tangente.

$$y - 2 = -\frac{1}{9}(x - 2) \quad \Rightarrow y = \frac{-x + 20}{9}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta normal a la curva es:

$$x + 9y - 20 = 0$$

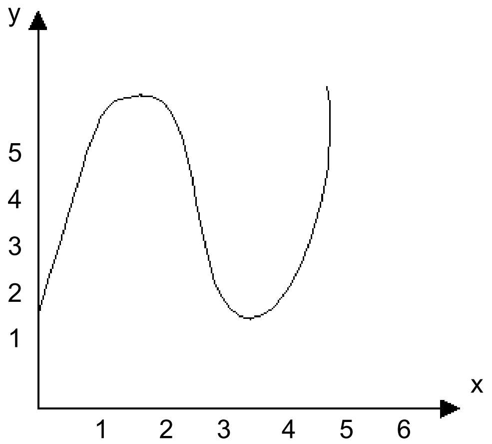
Revisa el procedimiento anterior y calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva: $x^2 - 4y^2 = 9$ en el punto (5, 2).

EJERCICIOS

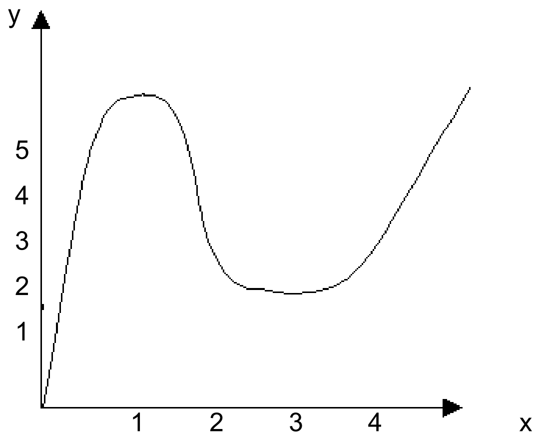
INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y contesta lo que se te solicita.

Para cada una de las siguientes funciones bosquejadas señala en qué intervalos éstas son crecientes y decrecientes.

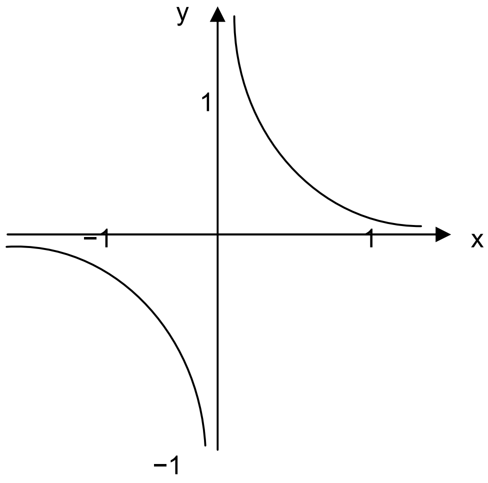
1.



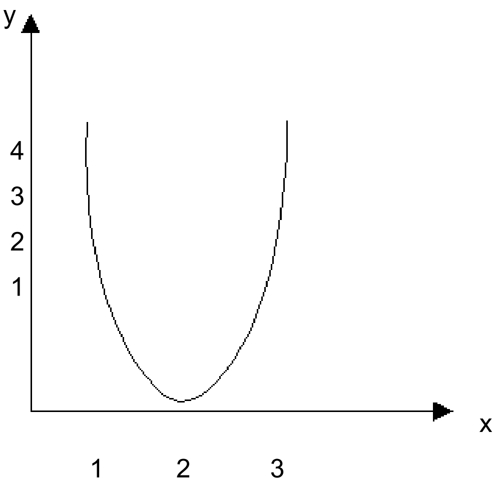
2.



3.



4.



INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente los siguientes reactivos y realiza lo que se te pide.

Para las siguientes funciones:

I. Calcula algebraicamente sus puntos críticos.
II. Realiza la gráfica.

5. $f(x) = x^2 + 3$

I

II

6. $f(x) = x^3 - 27x$

I

II

7. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

I

II

8. $y = x^2 - 4x + 1$

I

II

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente los siguientes reactivos y realiza lo que se te pide.

Para las siguientes funciones:

I. Calcula algebraicamente sus puntos máximos y mínimos.
II. Realiza la gráfica.

9. $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ en el intervalo [0, 6]

I

II

10. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ en el intervalo [−2, 2]

I

II

11. $y = 2x^3 + 4x - 5$ en el intervalo [−2, 2]

I

II

12. $y = x^3 - 6x^2 + 15$ en el intervalo [−1, 5]

I

II

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente los siguientes reactivos y realiza lo que se te pide.

Para las siguientes funciones:

I. Calcula los posibles puntos de inflexión.
II. Determina el sentido de concavidad.
III. Construye la gráfica correspondiente para verificar los resultados.

13. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 9x + 2$

I

II

III

14. $f(x) = x^3 - 3x + 4$

I

II

III

15. $f(x) = 3x^3 - 9x + 1$

I

II

III

16. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3$

I

II

III

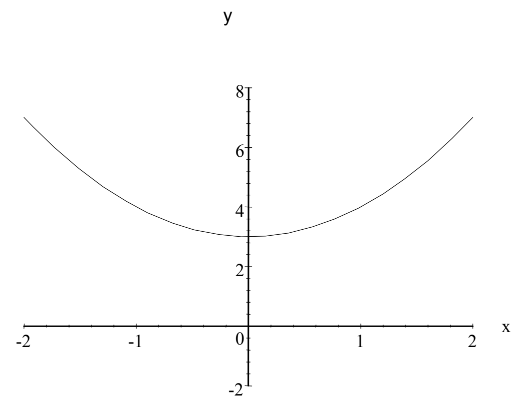
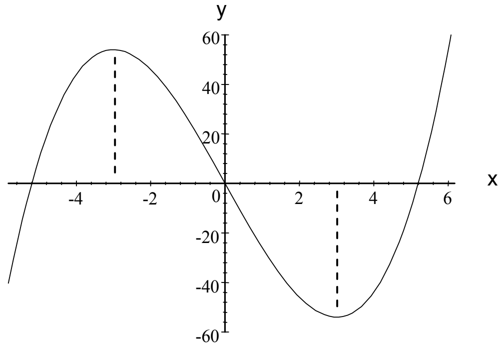
INSTRUCCIONES: Para cada una de las siguientes funciones calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto indicado.

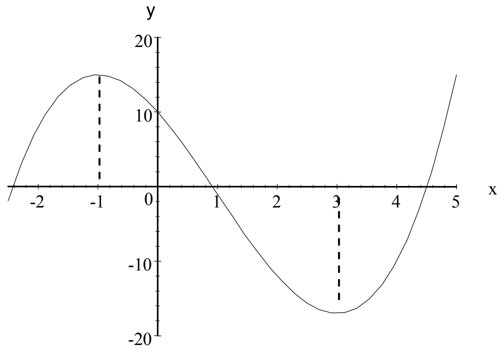
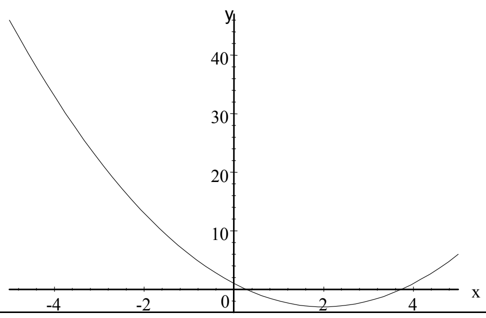
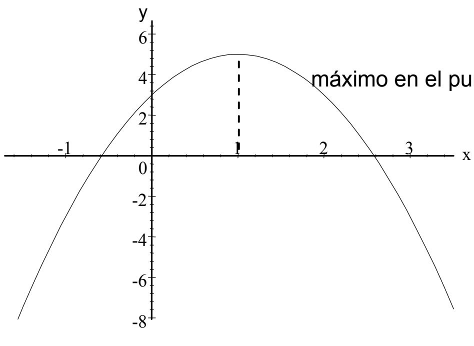
17. $f(x) = x^2 - x + 2$ en el punto (3, 8).

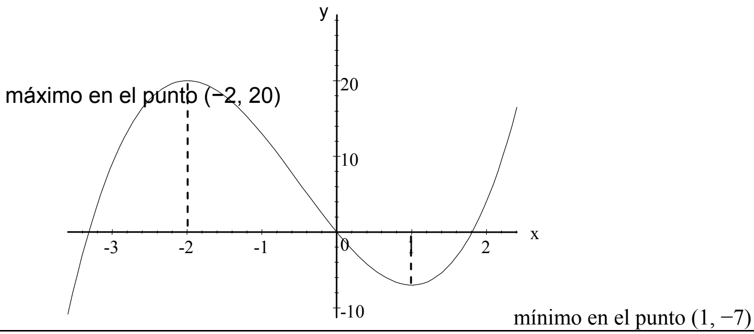
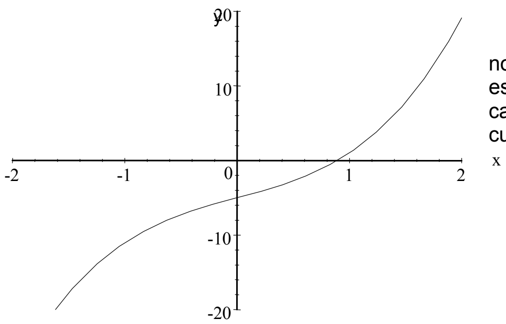
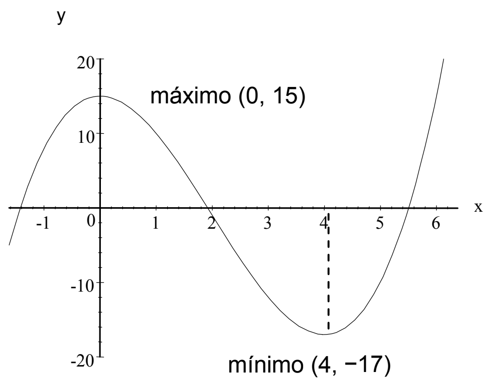
18. $f(x) = \frac{1}{x}$ en donde $x = 2$.

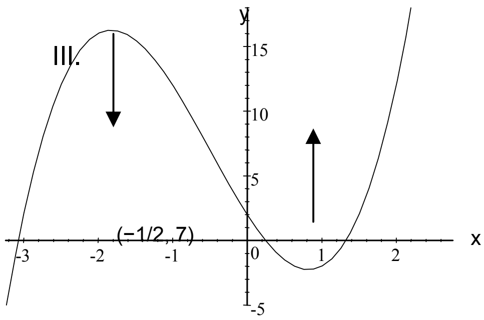
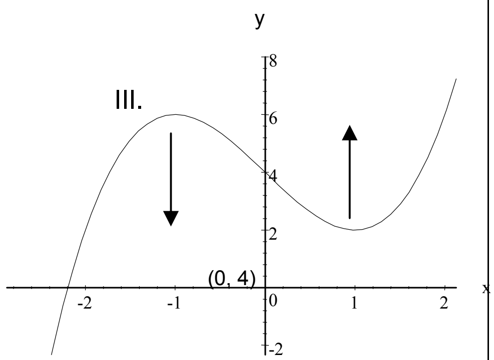
19. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en el punto (3, 1).

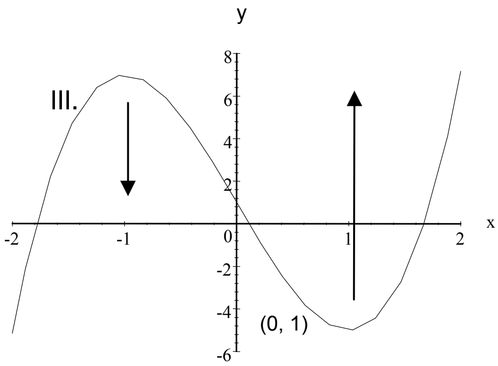
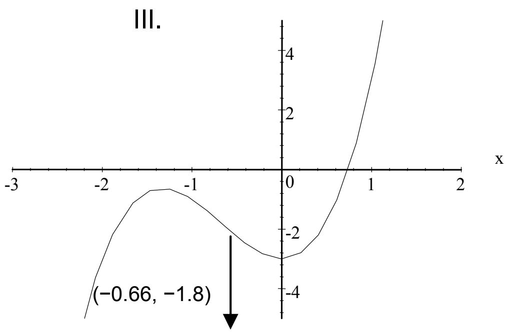
TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	Crece en el intervalo [0, 1.5] Decrece en el intervalo [1.5, 3.5] Crece en el intervalo [3.5, 5]
2	Crece en el intervalo [0, 1] Decrece en el intervalo [1,2. 5] Crece en el intervalo [2.5, 4]
3	Decrece en el intervalo [−1.5, −0.1] Decrece en el intervalo [0.1, 1.5]
4	Decrece en el intervalo [1, 2] Crece en el intervalo [2, 3]
5	I. Punto crítico en *x* = 0 II. 
6	I. Puntos críticos en $x = \pm 3$ II. 

Número de pregunta	Respuesta correcta
7	I. Puntos críticos en $x = -1$ y $x = 3$ II. 
8	I. Puntos críticos en $x = 2$ II. 
9	I. $f'(x) = -4x + 4 \Rightarrow -4x + 4 = 0 \therefore -4x = 4 \Rightarrow x = 1$ II.  máximo en el punto (1, 5).

Número de pregunta	Respuesta correcta
10	I. $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$ $\therefore\; x = -2 \; y \; x = 1$ II. 
11	I. $y' = 6x^2 + 4 \Rightarrow 6x^2 + 4 = 0 \therefore x^2 = \frac{-4}{6}$ II.  no hay máximos ni mínimos en esta función; no podemos calcular resultados con raíces cuadradas negativas
12	I. $y' = 3x^2 - 12x \Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$ $\therefore\; x = 0 \; y \; x = 4$ II. 

Número de pregunta	Respuesta correcta
13	I. $f'(x) = 6x^2 + 6x - 9 \Rightarrow f''(x) = 12x + 6 \Rightarrow 12x + 6 = 0 \;\therefore\; x = -\frac{1}{2}$ punto de inflexión $\left(-\frac{1}{2},\ 7\right)$. II. Cuando x toma los valores menores a −1/2 hasta −3, la curva es cóncava hacia abajo y si x toma los valores mayores que −1/2 hasta 3, la curva es cóncava hacia arriba. 
14	I. $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x \therefore x = 0$ punto de inflexión (0, 4) II. Cuando x toma valores menores que 0 hasta –2, la curva es cóncava hacia abajo; cuando x toma valores mayores que 0 hasta 2 es cóncava hacia arriba. 

Número de pregunta	Respuesta correcta
15	I. $f'(x)=9x^2-9 \Rightarrow f''(x)=18x \therefore x=0$; punto de inflexión (0, 1). II. Cuando x toma valores menores que 0 hasta –2, la curva es cóncava hacia abajo; cuando x toma valores mayores que 0 hasta 2 es cóncava hacia arriba. 
16	I. $f'(x)=6x^2+8x \Rightarrow f''(x)=12x+8 \therefore x=-\frac{2}{3}$ punto de inflexión (−0.66, − 1.8). y II. Cuando x toma valores menores que –2/3 hasta –2, la curva es cóncava hacia abajo; cuando x toma valores mayores que –2/3 hasta 2 es cóncava hacia arriba. 
17	Ecuación de la tangente. $f'(x)=2x-1 \quad \Rightarrow \quad f'(3)=2(3)-1=5 \quad \therefore \quad y=5x-7$ Ecuación de la normal. $y=\frac{-x+43}{5}$

Número de pregunta	Respuesta correcta
18	Ecuación de la tangente. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(2) = -\frac{1}{4} \quad \therefore \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ Ecuación de la normal: $y = 4x - 8$
19	Ecuación de la tangente. $f'(x) = 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = 2(3) - 3 = 3 \quad \therefore \quad y = 3x - 8$ Ecuación de la normal. $y = -\frac{1}{3}x + 2$

Sugerencias
Cuando la derivada de una función tiene signo positivo es creciente en ese intervalo y cuando tiene signo negativo es decreciente. Si la segunda derivada de la función es mayor que cero, $[f''(x) > 0]$, entonces la gráfica de la función será cóncava hacia arriba. Si la segunda derivada de la función es menor que cero, $[f''(x) < 0]$, entonces la gráfica de la función será cóncava hacia abajo.

2.4 LÍMITES

Aprendizajes

- Calcular el límite de una función.
- Determinar la continuidad de una función.

Límite de una función

En esta sección veremos cómo se calcula el límite de una función. De inicio podemos decir que la idea de límite es lo que distingue al Cálculo de otras ramas de la Matemática, en otras palabras, el Cálculo es el estudio de los límites.

Ahora bien, recuerda que la noción de límite es una idea fundamental que manejamos en forma intuitiva. Veamos la siguiente definición.

Sea y una función definida en $\Re$ (números reales) o en algún intervalo contenido en $\Re$, excepto tal vez en un punto x_0 de este intervalo.

El límite de f en x_0 es L, si L es el valor que toma la función en x_0 para que sea continua, es decir:

si el $\lim\limits_{x \to x_0}$ $f(x) = f(x_0)$, entonces la función f es continua en x_0.

Por ejemplo: si $f(x) = x^2 + x - 1$ tiene un valor en $x = 3$, entonces

$$\lim_{x \to 3} x^2 + x - 1 = \lim_{x \to 3} (3)^2 + (3) - 1 = 11$$

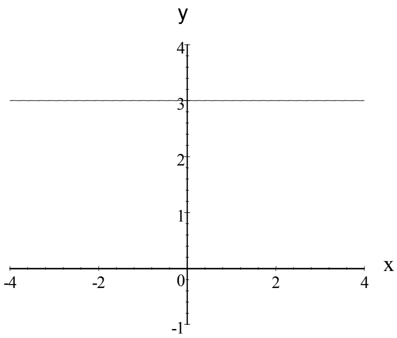
El límite de una función $\lim\limits_{x \to c} h(x)$ puede bien existir, pero diferir de $h(c)$; de hecho, $h(c)$ podría no estar definido, aunque existiera el límite.

Continuidad de una función

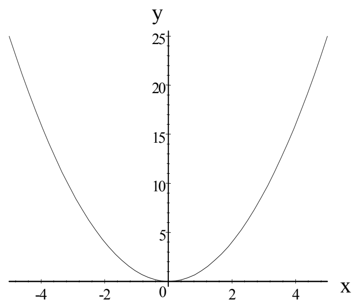
Las funciones tienen la propiedad de que los valores funcionales cerca de un punto son próximos al valor funcional[2] en ese punto. Esta propiedad, que se llama continuidad, se relaciona con la idea de límite y se toma como dada en la mayoría de los teoremas de cálculo.

[2] Los valores funcionales correspondientes a puntos cercanos a un punto dado son cercanos al valor funcional que corresponde al punto dado.

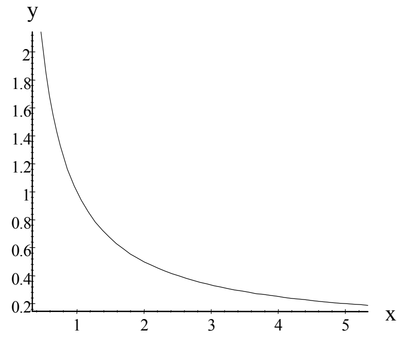
Las siguientes funciones son continuas en los dominios que se indican:



$f(x) = 3, \forall\ x$



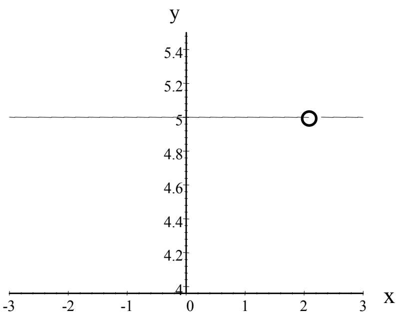
$f(x) = x^2, \forall\ x$



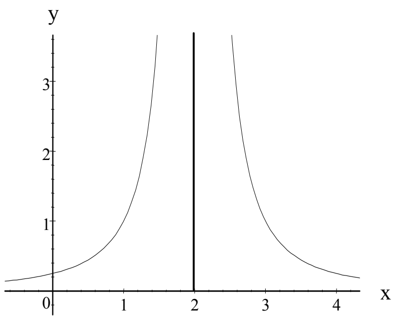
$f(x) = \frac{1}{x}, \forall\ x > 0$

Intuitivamente, podemos decir que **la función es continua si su gráfica no presenta rupturas ó saltos y puede trazarse sin levantar el lápiz del papel.**

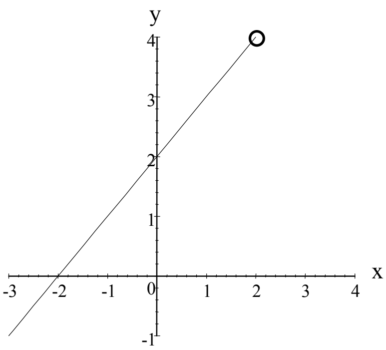
Observa las siguientes funciones, cada una presenta una discontinuidad en $x = 2$.



$f(x) = \begin{cases} 5, \text{si } x \geq 2 \\ x^2, \text{si } x < 2 \end{cases}$



$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$



$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Una función *f(x)* **es continua en un punto *x = c* , si la función está definida en *c* y si los valores de *x* muy cercanos a *c* producen valores de la función muy cercanos a *f (c)*.**

APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Veamos cómo se calcula el **límite de la función**: $f(x) = x^3 - 3x + 1, \ cuando \quad x \to 2$

En este caso, sustituimos el valor de x en la función, entonces:

$$\lim_{x \to 2}\left(x^3 - 3x + 1\right) = (2)^3 - 3(2) + 1 = 3$$

Ahora calcularemos el límite de la función: $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x}, \ cuando \quad x \to 0$

Para este ejercicio observamos que x se acerca más y más al valor de cero, por lo cual no tiene valor alguno; es decir, no está definida para *x = 0*; entonces, lo que debemos hacer es la división entre *x,* en este caso:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2 + 3x}{x}\right) = \lim_{x \to 0}(x + 3) = 0 + 3 = 3$$

En este otro ejemplo calcularemos el límite de la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \ cuando \quad x \to 2$

Para esta función, al sustituir el valor de x vemos que resulta cero entre cero; es decir, debemos reducir numerador y denominador antes de tomar el límite.

$$\lim_{x \to 2}\left(\frac{x^2 - 4}{x - 2}\right) = \lim_{x \to 2}\frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

Siguiendo las ideas anteriores analiza las siguientes funciones y calcula sus límites.

1. $\lim_{x \to 3}\left(x^2 - 4\right) =$

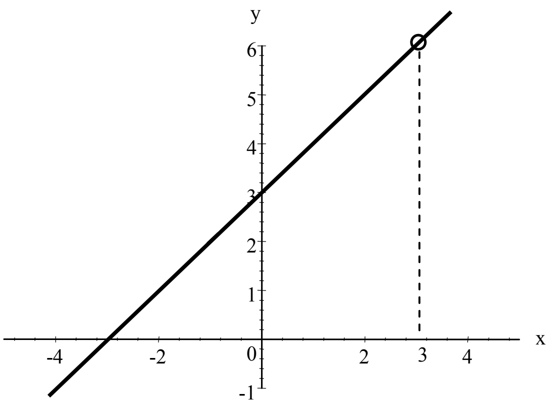
2. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} \right) =$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x + 5} \right) =$

Ahora vamos a analizar en qué valor de x la siguiente función **no es continua** y a verificarlo gráficamente.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}; \; si \; x = 3, \; tenemos \; que \; f(3) = \frac{(3)^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

Por lo tanto, en $x = 3$ la función no es continua y su gráfica es:



En el siguiente ejercicio encuentra para qué valor de x la función es discontinua. Además, verifícalo gráficamente.

$$f(x) = \begin{cases} 9, \; si \; x > 3 \\ x^2, \; si \; x < 3 \end{cases}$$

EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y calcula los límites de cada función.

1. $\lim\limits_{x \to 3} \left(2x^2 + x - 4\right) =$

2. $\lim\limits_{t \to -1} \left(t^3 + 1\right) =$

3. $\lim\limits_{s \to 0} \left(2s^2 - 4s - 3\right) =$

4. $\lim\limits_{t \to -2} \dfrac{t^3 + t^2}{t + 1} =$

5. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2xh + h^2}{h} =$

6. $\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{(2+x)^2-2^2}{x}=$

7. $\underset{x\to 3}{lím}\dfrac{x^2-9}{x-3}=$

8. $\underset{x\to 2}{lím}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=$

9. $\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{2ax+6x+2x^2}{x}=$

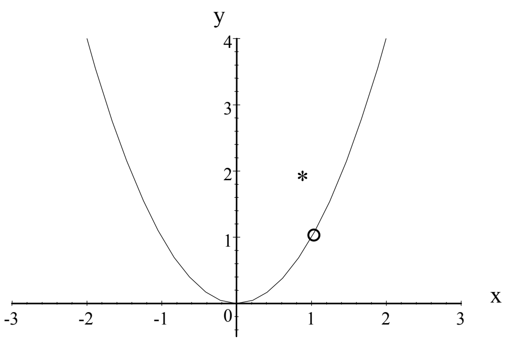
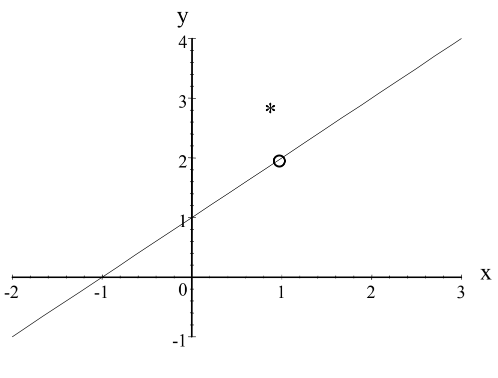
INSTRUCCIONES: Para cada una de las siguientes funciones señala dónde existe discontinuidad y verifícalo gráficamente.

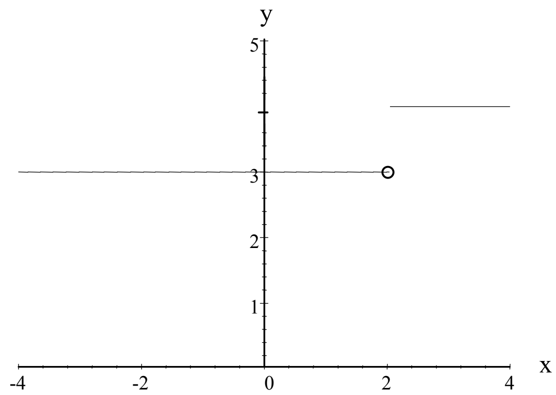
10. $f(x) = \begin{cases} x^2, \; si \quad x \neq 1 \\ 2, \; si \; x = 1 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, si \; x \neq 1 \\ 3, \; si \; x = 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 3, \; si \, x < 2 \\ 4, si \, x \geq 2 \end{cases}$

TABLA DE COMPROBACIÓN

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	17
2	0
3	-3
4	4
5	$2x$
6	4
7	6
8	-1
9	$2a+6$
10	
11	

Número de pregunta	Respuesta correcta
12	

Sugerencias

Una función es continua si su gráfica *no presenta rupturas o saltos* y puede trazarse sin levantar el lápiz del papel; esto significa que *a cada valor de x (cualquiera que sea) le corresponde sólo un valor de y.*

AUTOEVALUACIÓN

Cuentas con sesenta minutos para resolver estos ejercicios

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes reactivos y contesta lo que se te solicita.

1. Para la siguiente función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

   I. Calcula la derivada.

   II. Calcula los puntos críticos.

   III. Calcula los puntos máximo y mínimo.

2. Para la siguiente función $y = x^2 - x - 2$; $[-1, 3]$

   I. Establece si es cóncava hacia abajo o hacia arriba.

   II. Construye su gráfica.

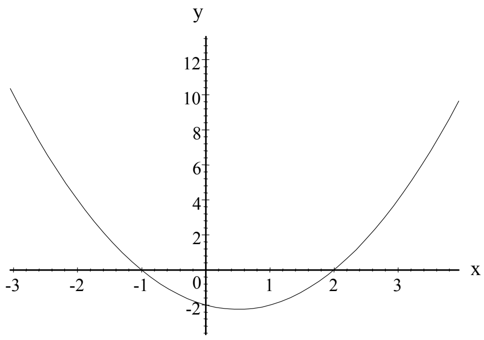
3. ¿Cuáles son los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 12x$?

4. Calcula las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto (1, 1).

5. Calcula el límite de la función $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$

6. Determina si la siguiente función es continua en el intervalo establecido. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $[0, 2]$

CLAVE DE RESPUESTAS

Número de pregunta	Respuesta correcta
1	I. $f'(x) = 3x^2 - 12x$ II. Puntos críticos x = (0, 4) III. Máximo (0, 15) mínimo (4, −17)
2	I. Es cóncava hacia arriba. II. 
3	Puntos de inflexión (0, 0)
4	Ecuación de la recta tangente: $y = x$ Ecuación de la recta normal: $y = -x + 2$
5	El límite es: 1
6	La función es discontinua en: x =1

BIBLIOGRAFÍA

AYRES FRIDNK. *Cálculo Diferencial e Integral*. McGraw-Hill, México, 1990.

BOSH−HERNÁNDEZ. *Cálculo Diferencial e Integral*. Publicaciones Cultural, México, 1981.

FUENLABRADA DE LA V., SAMUEL. *Cálculo Diferencial.* McGraw -Hill, México, 1995.

LARSON – HOSTETLERS, EDWARDS. *Cálculo*. McGraw - Hill, México, 1996. Volumen 1.

PURCELL, EDWIN J., VARBERG, DALE. *Cálculo Diferencial e Integral*. Prentice-Hall, México, 1992.

SWOKOWSKI, EARL. I*ntroducción al cálculo con geometría analítica.* Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1979.

ZILL, DENNIS G. *Cálculo con geometría analítica*. Iberoamérica, México, 1987.

SUGERENCIAS PARA PRESENTAR EXÁMENES DE RECUPERACIÓN O ACREDITACIÓN ESPECIAL

Para evitar cualquier contratiempo al presentar el examen de recuperación o acreditación especial debes considerar las siguientes recomendaciones:

Organización:

- Preséntate al menos con 10 minutos de anticipación al salón indicado. Debes **mostrar** esta guía resuelta al profesor aplicador.
- Lleva el comprobante de inscripción al examen y tu credencial actualizada.
- Lleva dos lápices del No. 2 ó 2 ½.
- No olvides una goma que no manche.

Durante el examen:

- Lee con atención tanto las instrucciones como las preguntas y si tienes alguna duda consúltala con el aplicador.
- Contesta primero las preguntas que te parezcan “fáciles” y después concentra toda tu atención en las “difíciles”.
- Si te solicitan explicar o desarrollar algún tema, identifica las ideas principales que quieras exponer y escríbelas de la manera más concreta y clara que puedas, evita el planteamiento de ideas innecesarias.
- Escribe tus respuestas con letra clara, legible y sin faltas de ortografía.
- Al terminar de contestar el examen, revísalo nuevamente para asegurarte que todas las preguntas estén contestadas.
- Centra tu atención en el examen, no trates de copiar, recuerda que el compañero de junto puede estar equivocado.

La Guía para presentar exámenes de
Recuperación o Acreditación especial de
Cálculo Diferencial e Integral I
se terminó de reimprimir en el mes de abril de 2006
en los talleres de la Impresora y Encuadernadora Progreso, S.A. de C.V.
Calz. San Lorenzo Tezonco núm. 244, Col. Paraje San Juan
Delegación Iztapalapa, C.P. 09830

El tiraje fue de 1 450 ejemplares
más sobrantes para reposición.